Note de cours de la :

Licence Professionnelle d'Enseignement des Mathématiques

Réductions des endomorphismes et applications

(Module : Algèbre 4)

Mohamed AQALMOUN

Univérsité Sidi Mohamed Ben Abedellah

École Normale Supérieure de Fès

Département de mathématiques

ENS FES

Laste updated

18 novembre 2020

Table des matières

Chapitre 1

Formes linéaires et hyperplans

1.1 Formes linéaires

Définition 1.1.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ c'est-à-dire un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. L'ensemble des formes linéaires sur E est appelé espace vectoriel dual de E et noté E^*. Ainsi $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Exemples :

1. L'application $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.
2. L'application $A \mapsto \text{tr}(A)$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. L'application $(x, y, z) \mapsto 2x + y - z$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Remarque : Soit φ une forme linéaire non nulle sur E. Alors φ est surjective. En effet, $\operatorname{Im} \varphi$ est un sous espace vectoriel non nul de $\mathbb{K}$, donc $\dim \operatorname{Im} \varphi \geq 1$. D'autre part $\operatorname{Im} \varphi$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}$, en particulier $\dim \operatorname{Im} \varphi \leq 1$. Par suite $\dim \operatorname{Im} \varphi = 1$. On en déduit que $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{K}$ c'est-à-dire φ surjective.

Proposition 1.2.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors l'espace dual E^* est de dimension finie et $\dim E^* = \dim E$.

Démonstration : Comme E et $\mathbb{K}$ sont des espaces vectoriels de dimensions finies, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$ est de dimension finie et on a $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K} = \dim E$.

1.2 Hyperplans

Définition 2.1. (Hyperplan)

Soit E un espace vectoriel. Un sous espace vectoriel H de E est dit hyperplan de E, s'il existe un <u>vecteur non nul e</u> de E tel que $E = H \oplus \text{Vect}(e)$.

Remarque : Lorsque $e \in E$ est non nul, $\mathrm{Vect}(e)$ est une droite vectoriel. Ainsi un sous espace vectoriel H de E est un hyperplan de E, si H est un supplémentaire dans E d'une droite vectorielle.

Exemple : Soit n un entier supérieur ou égale à 1 et $H := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ \mathrm{tr}(A) = 0\}$. On rappel que la trace d'une matrice carrée A est la somme de ses coefficients de la diagonale. On a $\mathrm{tr}(I_n) = n \neq 0$ donc $I_n \notin H$, par conséquent $H \cap \mathrm{Vect}(I_n) = \{0\}$, donc la somme $H + \mathrm{Vect}(I_n)$ est directe. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $A = (A - \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A)I_n) + \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A)I_n$ et $\mathrm{tr}(A - \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A)I_n) = 0$, donc $A \in H + \mathrm{Vect}(I_n)$. On en déduit alors que

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = H \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$$

Ainsi H est un heperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 2.2.

Soit E un espace vectoriel et H un sous espace vectoriel de E. Alors H est un hyperplan de E si, et seulement si, $\dim(E/H) = 1$.

Démonstration : Si H est un hyperplan de E, alors il existe un vecteur non nul e de E tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(e)$. Soit maintenant f la projection sur $\mathrm{Vect}(e)$ et parallèlement à H, on a $\ker f = H$ et $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e)$, par le théorème d'isomorphsme, $E/\ker f$ est isomorphe à $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e)$, en particulier $\dim E/H = \dim \mathrm{vect}(e) = 1$.
Réciproquement, supposons que $\dim E/H = 1$. Il existe un vecteur non nul $\overline{e} \in E/H$ tel que $E/H = \mathrm{Vect}(\overline{e})$. Puisque $e \notin H$ car $\overline{e} \neq 0$, $H \cap \mathrm{Vect}(e) = \{0\}$. Soit $x \in E$, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\overline{x} = \alpha\overline{e}$, ou encore $h = x - \alpha e \in H$. Par suite $x = h + \alpha e$. On en déduit que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(e)$.

Proposition 2.3.

Soit E un espace vectoriel et H un hyperplan de E.

1. *Si F est un sous espace vectoriel de E tel que $H \subseteq F$ alors $F = H$ ou $F = E$.*
2. *Pour tout $e \in E \setminus H$, $H \oplus \mathrm{Vect}(e) = E$.*

Démonstration :

1. Soit F un sous espace vectoriel de E contenant H. Puisque F/H est un sous espace vectoriel de E/H et $\dim E/H = 1$, il est donc de dimension 0 ou 1, c'est-à-dire $F/H = \{\overline{0}\}$ et dans ce cas $F = H$ ou $F/H = E/H$ et dans ce cas $F = E$.
2. Soit $e \in E \setminus H$. Puisque $e \notin H$, la somme $H + \mathrm{Vect}(e)$ est directe. De plus $H \oplus \mathrm{Vect}(e)$ est un sous espace vectoriel de E contenant H. D'après le résultat précédent, $H \oplus \mathrm{Vect}(e) = H$ ou $H \oplus \mathrm{Vect}(e) = E$. De $e \in H \oplus \mathrm{Vect}(e)$ et $e \notin H$, il vient que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(e)$.

La proposition suivante caractérise les hyperplans en dimension finie :

Proposition 2.4.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et H un sous espace vectoriel de E. Alors H est un hyperplan de E si, et seulement si, $\dim H = n - 1$.

Démonstration : On sait que $\dim E/H = \dim E - \dim H$. Donc H est un hyperplan de E si, et seulement si, $\dim(E/H) = n - \dim H = 1$ si, et seulement si, $\dim H = n - 1$.

1.3 Lien entre formes linéaires et hyperplans

Proposition 3.1.

Soit E un espace vectoriel et φ une forme linéaire non nulle sur E. Alors $\ker\varphi$ est un hyperplan de E.

Démonstration : Comme φ est une forme linéaire non nulle, elle est surjective (voir la première remarque), et donc $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{K}$. Par le théorème d'isomorphisme $E/\ker\varphi$ est isomorphe à $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{K}$. Il vient alors que

$$\dim E/\ker\varphi = \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim\mathbb{K} = 1$$

D'où $\ker\varphi$ est un hyperplan de E.
Le théorème suivant donne le lien entre les hyperplans et les formes linéaires :

Théorème 3.2.

Soit E un espace vectoriel et H un sous espace vectoriel de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *H est un hyperplan de E,*
2. *Il existe une forme linéaire non nulle de E telle que $H = \ker\varphi$.*

Démonstration : L'implication 2. $\Rightarrow$ 1. est le résultat de la proposition précédente.
Supposons que H est un hyperplan, et soit $e \in E$ non nul tel que $E = H \oplus \operatorname{Vect}(e)$. Pour $x \in E$, il existe un unique couple $(h_x, \alpha_x) \in H \times \mathbb{K}$ tel que $x = h_x + \alpha_x e$. Soit $\varphi : E \to \mathbb{K}$ l'application définie par $\varphi(x) = \alpha_x$. Clairement φ est une forme linéaire sur E et $\ker\varphi = H$, en effet ; soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $x = h_x + \alpha_x e$ et $y = h_y + \alpha_y e$ où $h_x, h_y \in H$ et $\alpha_x, \alpha_y \in \mathbb{K}$. On a donc

$$\varphi(x + \lambda y) = \varphi(h_x + \lambda h_y + (\alpha_x + \lambda\alpha_y)e) = \alpha_x + \lambda\alpha_y = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$$

De plus, comme $e = 0 + 1e$, on a donc $\varphi(e) = 1 \neq 0$. On en déduit que φ est une forme linéaire non nulle sur E.
Soit $x \in E$, on a donc $x = h_x + \varphi(x)e$. Donc $\varphi(x) = 0$ si, et seulement si, $x = h_x \in H$. D'où $\ker\varphi = H$.

1.4 La base duale

Théorème 4.1.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour $1 \leq i \leq n$, il existe une unique forme linéaire sur E notée e_i^* vérifiant :

$$\textit{Pour tout}\quad 1 \leq j \leq n\ ,\quad e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0 & \textit{si} \quad j \neq i, \\ 1 & \textit{si} \quad j = i. \end{cases}$$

Démonstration : Une application linéaire est uniquement déterminée par la donnée de l'image d'une base.

Remarque : Pour $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E$, on a

$$e_i^*(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_i^*(e_k) = x_i e_i^*(e_i) + \underbrace{\sum_{k=1, k\neq i}^{n} x_k e_i^*(e_k)}_{=0} = x_i$$

Ainsi, $e_i^*(x)$ est la ième composante de x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Proposition 4.2.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. La famille $\mathcal{B}^* := (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*, appelée base duale de $\mathcal{B}$.

Démonstration : On sait que $\dim E^* = n$, il suffit donc de montrer que c'est une famille libre. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k^* = 0$. Pour $1 \leq i \leq n$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k^*\right)(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k^*(e_i) = \lambda_i e_i^*(e_i) + \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \lambda_k e_k^*(e_i) = \lambda_i$$

Par suite $\lambda_i = 0$.

Proposition 4.3.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

$$\textit{Pour tout } x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k$$

$$\textit{Pour tout } \varphi \in E^*, \quad \varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_k) e_k^*$$

Démonstration : Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E$, il suffit de remarquer que $x_k = e_k^*(x)$, donc $x = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k$.

Soit $x \in E$, on a $x = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k$, donc

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) \varphi(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_k) e_k^*(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi(e_k) e_k^*\right)(x)$$

D'où $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_k) e_k^*$.