Note de cours de la :

Licence Professionnelle d'Enseignement des Mathématiques

Réductions des endomorphismes et applications

(Module : Algèbre 4)

Mohamed AQALMOUN

Univérsité Sidi Mohamed Ben Abedellah

École Normale Supérieure de Fès

Département de mathématiques

ENS FES

Laste updated

8 décembre 2020

Table des matières

Chapitre 2

Éléments propres et polynômes d'endomorphismes

2.1 Sous espaces stables

Définition 1.1.

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous espace vectoriel de E.

1. *On dit que F est stable par u si $u(F) \subseteq F$ i.e pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.*
2. *Si F est stable par u, on appelle endomorphisme induit par u sur F, l'endomorphisme de F noté u_F qui à tout x associe $u(x)$.*

Exemples :

1. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E et $F = \ker(u - \mathrm{Id}_E)$. Le sous espace vectoriel F est stable par u, en effet, si $x \in \ker(u - \mathrm{Id}_E)$, alors

$$(u - \mathrm{Id}_E)(u(x)) = u^2(x) - u(x) = u(u(x) - x) = u(0) = 0$$

   Donc $u(x) \in F$. De plus pour tout $x \in F$, on a $u(x) = x$, par conséquent $u_F = \mathrm{Id}_F$.

2. (Droite vectorielle stable par u) : Soit E un espace vectoriel, x un vecteur non nul de E, et $D = \mathrm{Vect}(x)$ la droite vectorielle engendrée par x. Si D est stable par u, alors $u(x) \in D$, il existe alors $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Réciproquement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$, alors pour tout $y = \alpha x \in D$, on a $u(y) = \alpha u(x) = \alpha\lambda x \in D$. Par suite

$$D = \mathrm{Vect}(x) \text{ est stable par } u \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ , tel que, } \quad u(x) = \lambda x.$$

Proposition 1.2.

Soient $E_1, \ldots, E_r$ des sous-espaces vectoriels de E et u un endomorphisme de E. Si $E_1, \ldots, E_r$ sont stables par u, alors :

1. *Le sous espace vectoriel $\bigcap_{i=1}^{r} E_i$ est stable par u.*

2. *Le sous espace vectoriel* $\sum_{i=1}^{r} E_i$ *est stable par* u*. En particulier, si les sous espaces vectoriels sont en somme directe, le sous espace vectoriel* $\bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ *est stable par* u*.*

Démonstration :

1. $u(\bigcap_{i=1}^{r} E_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} u(E_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} E_i$.
2. Soit $x \in \sum_{i=1}^{r} E_i$, ils existent $x_1 \in E_1, \ldots, x_r \in E_r$ tels que $x = x_1 + \ldots + x_r$. On a donc $u(x) = u(x_1) + \ldots + u(x_r) \in \sum_{i=1}^{r} E_i$.

Théorème 1.3.

Soit E *un espace vectoriel et* $u, v \in \mathcal{L}(E)$ *. Si* u *et* v *commutent, alors* $\operatorname{Im} v$ *et* $\ker v$ *sont stables par* u*.*

Démonstration :
Soit $y \in \operatorname{Im} v$ et $x \in E$ tel que $y = v(x)$. On a $u(y) = u(v(x)) = v(u(x)) \in \operatorname{Im} v$.
Soit $x \in \ker v$, on a $v(u(x)) = u(v(x)) = u(0) = 0$, donc $u(x) \in \ker v$.

Remarque : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Puisque u commute avec lui même, les sous espaces vectoriels $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par u.

Proposition 1.4.

Soit E *un espace vectoriel et* $u \in \mathcal{L}(E)$*. Soit* F *un sous espace vectoriel de* E *et* $(e_1, \ldots, e_p)$ *une famille génératrice de* F*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. F *est stable par* u*,*
2. *Pour tout* $1 \leq i \leq p$*,* $u(e_i) \in F$*.*

Démonstration :
1. $\Rightarrow$ 2. Par définition de la stabilité.
Réciproquement, supposons 2. et soit $x \in F$, alors ils existent $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$. Donc $u(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u(e_i) \in F$.

Proposition 1.5.

Soient E un espace vectoriel de dimension n, F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et u un endomorphisme de E.
F est stable par u si, et seulement si, la matrice de u dans toute base adaptée à F est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Démonstration :
Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à F, c'est-à-dire $\mathcal{B}$ est de la forme $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ où $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F. Donc F est stable par u si, et seulement si, pour chaque $1 \leq i \leq p$, $u(e_i)$ est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$. Ceci prouve le résultat.

Remarque : La matrice A représente la matrice de l'endomorphisme u_F dans la base $(e_1, \ldots, e_p)$.

2.2 Polynômes d'endomorphismes

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On note

$$\begin{cases} u^0 & = & \mathrm{Id}_E \\ u^n & = & \underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{n \text{ fois}} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Ainsi pour $n \geq 1$, $u^n = u^{n-1} \circ u = u \circ u^{n-1}$.

Définition 2.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. L'endomorphisme $P(u)$ est défini par ;

$$P(u) := \sum_{k=0}^{n} a_k u^k = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 u + \ldots + a_n u^n$$

Remarque : Si $P = c$ est un polynôme contant, alors $P(u) = c\,\mathrm{Id}_E$.

Proposition 2.2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi(P) = P(u)$ est un morphisme d'algèbres c'est-à-dire linéaire, $\varphi(PQ) = P(u) \circ Q(u)$ et $\varphi(1) = \mathrm{Id}_E$.

Démonstration :
Il est clair que φ est linéaire et $\varphi(1) = \varphi(X^0) = u^0 = \mathrm{Id}_E$.
Soient $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q \in \mathbb{K}[X]$.

Si Q est de la forme $Q = X^l$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(PQ) &= \varphi\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^{k+l}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^{k+l} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k u^k \circ u^l = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k u^k\right) \circ u^l \\
&= P(u) \circ Q(u) = \varphi(P) \circ \varphi(Q)
\end{aligned}$$

Revenant au cas général, où $Q = \sum_{l=0}^{m} b_l X^l$ est un polynôme quelconque. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(PQ) &= \varphi(\sum_{l=0}^{m} b_l P X^l) = \sum_{l=0}^{m} b_l \varphi(PX^l) = \sum_{l=0}^{m} b_l \varphi(P) \circ \varphi(X^l) \\
&= \varphi(P) \circ \left(\sum_{l=0}^{m} b_l \varphi(X^l)\right) = \varphi(P) \circ \left(\varphi(\sum_{l=0}^{m} b_l X^l)\right) \\
&= \varphi(P) \circ \varphi(Q)
\end{aligned}$$

Version matricielle : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On note par $P(M)$ la matrice

$$P(M) := \sum_{k=0}^{m} a_k M^k = a_0 I_p + a_1 M + \ldots + a_m M^m$$

L'application $\Psi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\Psi(P) = P(M)$ est un morphisme d'algèbres c'est-à-dire linéaire, $\Psi(PQ) = \Psi(P)\Psi(Q)$ et $\Psi(1) = I_n$.

Définition 2.3.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *. On dit que* P *est un polynôme annulateur de* u *si* $P(u) = 0$.
2. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On dit que* P *est un polynôme annulateur de* M *si* $P(M) = 0$.

Exemple : Si u est un projecteur de E, alors $P = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de u. Le polynôme $X^2 - 1$ est annulateur de toute symétrie de E.

Proposition 2.4.

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie,* $\mathcal{B}$ *une base de* E *et* $u \in \mathcal{L}(E)$, *notons* $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$. *Pour tout polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$, *on a*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(M)$$

Ainsi, un polynôme P *est annulateur de* u *si, et seulement si,* P *est annulateur de* M.

Démonstration :
L'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un isomorphisme d'algèbres, en particulier, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)) = P(M)$. Plus précisément, si $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P(u)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\sum_{k=0}^{m} a_k u^k) = \sum_{k=0}^{m} a_k \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)^k = P(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)) = P(M)$$

De plus, $P(u) = 0$ si, et seulement si, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P(u)) = 0$ si, et seulement si, $P(M) = 0$.

2.3 Polynôme minimal

Théorème et définition 3.1.

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Il existe un unique polynôme annulateur de u (respectivement de M) de degré minimum et unitaire appelé polynôme minimal de u (respectivement de M) . On le note π_u (respectivement π_M).

Démonstration :
Soit I l'ensemble des polynômes annulateurs de u, c'est-à-dire

$$I = \{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ P(u) = 0\} = \ker \varphi.$$

Clairement I est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ (c'est le noyau du morphisme d'algèbres $\varphi : P \mapsto \varphi(P) = P(u)$). On sait que $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$, donc $(Id_E, u, \dots, u^{n^2})$ est une famille liée. Il existe $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n^2}$ non tous nuls tels que $\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k u^k = 0$. Par suite $P = \sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k X^k$ est un polynôme annulateur non nul de u. On en déduit alors que I est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$, il existe alors un unique polynôme unitaire π_u tel que $I = (\pi_u)$ (I est l'idéal engendré par le polynôme π_u). Puisque $\pi_u \in I$, on a $\pi_u(u) = 0$. Si P est un polynôme unitaire annulateur de u, alors $P \in I$, et donc $P = Q\pi_u$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$. Par suite $\deg(P) = \deg(Q) + \deg(\pi_u) \geq \deg(\pi_u)$.

Exemple :

1. $\pi_{I_n} = X - 1$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $M^2 = 0$, d'autre part M n'admet aucun polynôme annulateur unitaire de degré ≤ 1, donc $\pi_M = X^2$.

Proposition 3.2.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si P est un polynôme annulateur de u, alors π_u divise P.

Démonstration :
On conserve les notations de la démonstration précédente. P est annulateur de u, donc $P \in I = (\pi_u)$, ou encore $P = Q\pi_u$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$. D'où π_u divise P.

Remarque : On a la version matricielle suivante : Si P est un polynôme annulateur d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors π_M divise P.

Théorème 3.3.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Alors $\pi_u = \pi_A$.

Démonstration :
C'est une conséquence du fait qu'un polynôme P est annulateur de u si et seulement s'il est annulateur de A.

2.4 Décomposition des noyaux

Théorème 4.1. (Lemme des noyaux)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$. Alors

$$\ker((PQ)(u)) = \ker(P(u)) \bigoplus \ker(Q(u)).$$

De plus, la projection de $\ker((PQ)(u))$ sur $\ker(P(u))$ et parallèlement au $\ker(Q(u))$ est un polynôme en u.

Démonstration :
Par le théorème de Bézout , puisque P et Q sont premiers entre eux, ils existent deux polynômes $R, S \in \mathbb{K}[X]$ tels que $RP + QS = 1$. Par suite

$$R(u) \circ P(u) + S(u) \circ Q(u) = \mathrm{Id}_E.$$

Soit $x \in \ker(P(u)) \cap \ker(Q(u))$, alors $x = \mathrm{Id}_E(x) = (R(u) \circ P(u))(x) + (S(u) \circ Q(u))(x) = 0$ puisque

$$(R(u) \circ P(u))(x) = R(u)(P(u)(x)) = R(u)(0) = 0$$

et

$$(S(u) \circ Q(u))(x) = S(u)(Q(u)(x)) = 0$$

Il vient alors que la somme $\ker(P(u)) + \ker(Q(u))$ est directe.
Si $x \in \ker(P(u))$, alors

$$((PQ)(u))(x) = ((QP)(u))(x) = Q(u)(P(u)(x)) = Q(u)(0) = 0$$

Donc $\ker(P(u)) \subseteq \ker((PQ)(u))$, de même on a $\ker(Q(u)) \subseteq \ker((PQ)(u))$. D'où

$$\ker(P(u)) \bigoplus \ker(Q(u)) \subseteq \ker((PQ)(u)).$$

Soit $x \in \ker((PQ)(u))$, on a

$$x = \mathrm{Id}_E(x) = (R(u) \circ P(u))(x) + (S(u) \circ Q(u))(x)$$

Posons $x_1 = (S(u) \circ Q(u))(x)$ et $x_2 = (R(u) \circ P(u))(x)$ de sorte que $x = x_1 + x_2$. On a $x_1 \in \ker(P(u))$, en effet ;

$$\begin{aligned} P(u)(x_1) &= P(u)(S(u) \circ Q(u)(x)) = ((PSQ)(u))(x) \\ &= ((SPQ)(u))(x) = S(u)((PQ)(u)(x)) \\ &= P(u)(0) = 0 \end{aligned}$$

De même on démontre que $x_2 \in \ker(Q(u))$. Donc $x \in \ker(P(u)) + \ker(Q(u))$. Finalement on a

$$\ker((PQ)(u)) = \ker(P(u)) \bigoplus \ker(Q(u)).$$

Notons $p_1 = S(u) \circ Q(u)$ et $p_2 = R(u) \circ P(u)$. Les deux endomorphismes p_1 et p_2 sont des polynômes en u. Pour $x \in \ker((PQ)(u))$, on a $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 = p_1(x) \in \ker P(u)$ et $x_2 = p_2(x) \in \ker Q(u)$. Par conséquent p_1 est la projection de $\ker((PQ)(u))$ sur $\ker P(u)$ et parallèlement au $\ker Q(u)$.

Corollaire 4.2. (Lemme des noyaux généralisé)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \ldots, P_r$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \ldots P_r$. Alors

$$\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(u)).$$

De plus, la projection de $\ker(P(u))$ sur $\ker(P_j(u))$ et parallèlement à la somme $\bigoplus\limits_{i=1, i\neq j}^{r} \ker(P_i(u))$ est un polynôme en u.

Démonstration :
Par récurrence sur r.
Le résultat est immédiat pour $r = 1$. Supposons le résultat pour $r \geq 1$ polynômes premiers entre eux deux à deux. Soient $P_1, \ldots, P_r, P_{r+1}$, $r+1$ polynômes premiers entre eux deux à deux. Posons $P = P_1 \ldots P_r P_{r+1}$ et $Q = P_1 \ldots P_r$ de sorte que $P = QP_{r+1}$. Clairement les deux polynômes Q et P_{r+1} sont premiers entre eux, d'après le théorème précédent, on a

$$\ker(P(u)) = \ker((QP_{r+1})(u)) = \ker(Q(u)) \oplus \ker(P_{r+1}(u))$$

Les polynômes $P_1, \ldots, P_r$ sont premiers entre eux, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\ker(Q(u)) = \oplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(u))$$

Par conséquent

$$\ker(P(u)) = \ker(Q(u)) \oplus \ker()P_{r+1}(u) = \oplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(u)) \oplus \ker(P_{r+1})(u) = \sum_{i=1}^{r+1} \ker(P(u_i))$$

Exemple : Soit E un espace vectoriel et s une symétrie de E. On considère le polynôme $P = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. Comme les polynômes $X - 1$ et $X + 1$ sont premiers entre eux, d'après le théorème des noyaux, $\ker(P(s)) = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$. D'autre part, puisque s est une symétrie, $P(s) = s^2 - \mathrm{Id}_E = 0$. D'où $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

Remarque : Un cas particulier : Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ sont deux à deux distincts et $P = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$, alors

$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$$

Corollaire 4.3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \dots, P_r$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \dots P_r$. Si P est un polynôme annulateur de u, alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(u)).$$

Démonstration :
Il suffit de remarquer que $\ker(P(u)) = E$.

2.5 Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Définition 5.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. *On dit que λ est une valeur propre de u, s'il existe un vecteur non nul x de E tel que $u(x) = \lambda x$.*
2. *Si λ est une valeur propre de u, tout vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.*
3. *L'ensemble des valeurs propres de u est appelé le spectre de u et se note $\mathrm{sp}(u)$ ou $\mathrm{spec}(u)$.*

Exemple : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $u(x, y) = (x + y, x + y)$. On a $u(1, 1) = (2, 2) = 2(1, 1)$. Donc 2 est une valeur propre de u, et $(1, 1)$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 2.

Proposition 5.2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *λ est une valeur propre de u,*
2. *L'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.*
3. *$\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$.*

Si de plus E est de dimension finie, les assertions précédentes sont équivalentes à $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas un isomorphisme.

Démonstration :
λ est une valeur propre de u si, et seulement si, il existe un vecteur non nul x tel que $u(x) = \lambda x$ si, et seulement si, il existe un vecteur non nul x tel que $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = 0$ si, et

seulement si, $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas injectif.
Trivialement, 2. et 3. sont équivalentes.

Corollaire 5.3.

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie,* $\mathcal{L}(E)$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Alors* $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ *si, et seulement si,* $\det(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = 0$

Démonstration :
$\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$si, et seulement si, $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas un isomorphisme si, et seulement si, $\det(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = 0$

Remarque : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $0 \in \operatorname{sp}(u)$ si, et seulement si, u n'est pas injectif. Si de plus E est de dimension finie, alors $0 \in \operatorname{sp}(u)$ si, et seulement si, u n'est pas un isomorphisme.

Définition 5.4. (Sous espace propre)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* λ *une valeur propre de* u*. Le sous espace propre associé à la valeur propre* λ *est le sous espace vectoriel noté* $E_\lambda(u)$*, défini par*

$$E_\lambda(u) := \ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = \{x \in E \ / \ u(x) = \lambda x\}.$$

Exemple : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini apr $f(x, y) = (x + y, x + y)$. On a $2 \in \operatorname{sp}(u)$, et $E_2(u) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / u(x, y) = 2(x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\} = \operatorname{Vect}((1, 1))$

Remarques : Si λ est une valeur propre de u, alors :

1. Le sous espace propre $E_\lambda(u)$ est formé de tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ et du vecteur nul.
2. $\dim(E_\lambda(u)) \geq 1$, en d'autres termes $E_\lambda(u)$ est un sous espace vectoriel non nul.
3. Le vecteur nul n'est jamais un vecteur propre (c'est par définition).

Théorème 5.5. (Somme de sous espaces propres)

Soit $u \in \mathcal{L}(u)$*, soient* $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ *des valeurs propres deux à deux distinctes de* u *(*$r \geq 2$*). Alors les sous espaces propres* $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_r}(u)$ *sont en somme directe c'est-à-dire*

$$\sum_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_r}(u)$$

Démonstration :
Pour $1 \leq i \leq r$, posons $P_i = X - \lambda_i$ et $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$. Comme les λ_i, $1 \leq i \leq r$, sont deux à deux distincts, les polynômes P_i , $1 \leq i \leq r$, sont premiers entre eux deux à deux. Par le Lemme des noyaux généralisé, on a

$$\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(u))$$

En particulier la somme $\sum_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u) = \sum_{i=1}^{r} \ker(P_i(u))$ est directe.

Remarque : Un cas particulier ($r = 2$) : Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u, alors

$$E_\lambda(u) \cap E_\mu(u) = \{0\}$$

Corollaire 5.6.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $e_1, \ldots, e_r$ sont des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors la famille $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre.

Démonstration :
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des valeurs propres de u deux à deux distinctes et $e_1, \ldots, e_r$ des vecteurs propres de u associés respectivement au valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Soit maintenant, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r = 0$, puisque la somme $E_{\lambda_1}(u) + \ldots + E_{\lambda_r}(u)$ est directe et $\alpha_i e_i \in E_{\lambda_i}(u)$, on a donc $1 \leq \forall i \leq r$, $\alpha_i e_i = 0$, ainsi $\alpha_i = 0$ ($e_i \neq 0$ car c'est un vecteur propre). On en déduit alors que la famille $(e_1, \ldots, r_r)$ est libre.

Corollaire 5.7.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. L'endomorphisme u admet au plus n valeurs propres deux à deux distinctes.

Démonstration :
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u. Pour chaque $1 \leq i \leq r$, soit e_i un vecteur propre de u associé à λ_i. D'après le résultat précédent, la famille $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre, par conséquent $r \leq n$.

Éléments propres d'une matrice carrée :

Définition 5.8.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. *On dit que λ est une valeur propre de M, s'il existe un vecteur colonne non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = \lambda X$.*
2. *Si λ est une valeur propre de M, tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $MX = \lambda X$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.*
3. *L'ensemble des valeurs propres de M est appelé le spectre de M et se note $\mathrm{sp}(M)$ ou $\mathrm{spec}(M)$.*
4. *Soit λ une valeur propre de M, le sous espace propre associé à la valeur propre λ, noté $E_\lambda(M)$ est le sous espace vectoriel $E_\lambda(M) = \ker(M - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ / \ MX = \lambda X\}$.*

Proposition 5.9.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *λ est une valeur propre de M,*
2. *$A - \lambda I_n$ n'est pas inversible,*
3. *$\det(M - \lambda I_n) = 0$.*

Démonstration :
λ est une valeur propre de M si et seulement s'il existe un vecteur colonne non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = \lambda X$ ou encore $(M - \lambda I_n)X = 0$ si, et seulement si, $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible. De plus la matrice $M - \lambda I_n$ est non inversible si, et seulement si, $\det(M - \lambda I_n) = 0$.

Remarque : La proposition précédente, donne une méthode pratique pour trouver les valeurs propres d'une matrice, a savoir; λ est une valeur propre de M si, et seulement si, λ est une solution de l'équation $\det(M - \lambda I_n) = 0$.
Le théorème suivant donne un lien entre les éléments propres d'un endomorpjhisme et ceux de sa matrice dans une base fixée.

Théorème 5.10.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors

1. *$\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(M)$.*
2. *Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) (= \mathrm{Sp}(M))$, $x \in E$ et $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$. Alors x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ si, et seulement si, X est un vecteur propre de M associé à la même valeur propre λ.*

Démonstration :

1. $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$ si, et seulement si, $u - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ n'est par injectif (n'est pas inversible) si, et seulement si, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E) = M - \lambda I_n$ n'est pas inversible si, et seulement si, $\lambda \in \mathrm{sp}(M)$.
2. $u(x) = \lambda x$ si, et seulement si, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u(x)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\lambda x)$ si, et seulement si, $MX = \lambda X$.

Proposition 5.11.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$, $x \in E_\lambda(u)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$, en particulier $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.

Démonstration :
Montrons d'abord par récurrence sur k, que $u^k(x) = \lambda^k x$.
$u^0(x) = \mathrm{Id}_E(x) = \lambda^0 x$. Supposons, pour $k \in \mathbb{N}$, que $u^k(x) = \lambda^k x$. On a $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(\lambda^k x) = \lambda^k u(x) = \lambda^k \lambda x = \lambda^{k+1} x$.
Soit $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, on a $P(u)(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k x = (\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k) x = P(\lambda)x$.

Comme $\lambda \in Sp(u)$, le sous espace vectoriel $E_\lambda(u)$ est non nul, soit alors x_0 un vecteur non nul de $E_\lambda(u)$. On a $P(u)(x_0) = P(\lambda)(x_0)$, par conséquent $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.

Remarque : La version matricielle du résultat précédent ; si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, X un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P(M)X = P(\lambda)X$.

Corollaire 5.12.

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si P est un polynôme annulateur de u, alors toute valeur propre de u est une racine de P. En d'autres termes

$$Sp(u) \subseteq \{ \text{ les racines de } P\}$$

Démonstration :
Soit $\lambda \in Sp(u)$ et x un vecteur propre associé à λ. D'après la proposition précédente, on a $P(\lambda)x = P(u)(x) = 0$ et $x \neq 0$, donc $P(\lambda) = 0$ c'est-à-dire λ est une racine de P.

Remarque : Si P est un polynôme annulateur de u, il se peut que l'une des racines de P ne soit pas une valeur propre de u, comme le montre l'exemple suivant : $u = Id_E$ et $P = X(X-1)$. Clairement P est annulateur de u. Mais 0 est une racine de P qui n'est pas une valeur propre de u.

Corollaire 5.13.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Alors $Sp(u) = \{0\}$.

Démonstration :
u nilpotent, donc non injectif, ainsi 0 est une valeur propre de u.
Réciproquement, soit λ une valeur propre de u. Comme u nilpotent, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $u^m = 0$. par suite X^m est un polynôme annulateur de u, donc λ^m est une valeur propre de l'endomorphisme nul. Il vient que $\lambda^m = 0$, d'où $\lambda = 0$.

2.6 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice

Définition 6.1.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de M est le polynôme noté χ_M à coefficients dans $\mathbb{K}$ défini par : $\chi_M(X) := \det(M - XI_n)$.

Exemples :

1. Le polynôme caractéristique de l'identité : $\chi_{I_n}(X) = \det(I_n - XI_n) = \det((1-X)I_n) = (1-X)^n \det(I_n) = (1-X)^n$.
2. Soit M la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors

$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} a-X & b \\ c & d-X \end{vmatrix} = X^2-(a+d)X+(ad-bc)$. Par suite ;

$$\chi_M(X) = X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det(M).$$

Cette formule est valable pour toute matrice d'ordre deux.

Définition 6.2.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de u noté χ_u est le polynôme caractéristique des d'une de ses matrices dans une base de E (ce polynôme ne dépend pas du choix de cette base). Ainsi, si M est la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ de E, on a par définition $\chi_u = \chi_M$.

Remarque : (Pour la justification de la définition précédente)
Soit E un espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Notons M (respectivement M') la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}'$). Par la formule de changement de bases, il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$M = PM'P^{-1}$$

On vérifie facilement que $M - XI_n = P(M' - XI_n)P^{-1}$, on a donc

$$\chi_M = \det(M - XI_n) = \det(P(M' - XI_n)P^{-1}) = \det(M' - XI_n) = \chi_{M'}$$

Ce qui donne la consistance à la définition précédente.

Proposition 6.3.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *χ_M est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.*
2. *Le coefficient de X^{n-1} de χ_M est $(-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}(M)$.*
3. *Le terme constant est $\det(M)$*

Remarque : On peut résumer la proposition précédente dans la formule suivante : Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\chi_M(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}(M)X^{n-1} + \ldots + \det(M)$$

Théorème 6.4.

1. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les valeurs propres de M sont les racines de χ_M dans $\mathbb{K}$.*
2. *Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de u sont les racines de χ_u dans $\mathbb{K}$.*

Démonstration :
λ valeur propre de M si, et seulement si, $\det(M - \lambda I_n) = 0$ si, et seulement si, $\chi_M(\lambda) = 0$ si, et seulement si, λ racine de χ_M.

Remarque : (Cas d'une matrice triangulaire) : Soit M une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$. Alors $M - XI_n$ est aussi une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux $m_{1,1} - X, \ldots, m_{n,n} - X$. Par suite $\chi_M = \det(M - XI_n) = \prod_{i=1}^{n}(m_{i,i} - X)$. En particulier les valeurs propres de M sont ses coefficients diagonaux.

Proposition 6.5.

1. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors M possède au plus n valeurs propres deux à deux distinctes.*
2. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension n. Alors u possède au plus n valeurs propres deux à deux distinctes.*

Démonstration :
Les valeurs propres de u (respectivement de M) sont les racines du polynôme caractéristique, qui est un polynôme de degré n, et ce dernier possède au plus n racines deux à deux distinctes.

Proposition 6.6.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous espace vectoriel de E stable par u.

1. *χ_{u_F} divise χ_u.*
2. *Si G est un supplémentaire de F dans E (i.e $E = F \oplus G$) et stable par u, alors $\chi_u = \chi_{u_F}\chi_{u_G}$.*

Démonstration :

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base adaptée à F de sorte que $(e_1, \ldots, e_p)$ soit une base de F. La matrice de u dans cette base est de la forme
$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
Où A est la matrice de u_F dans la base $(e_1, \ldots, e_p)$. On a donc
$$\chi_u = \begin{vmatrix} A - XI_p & B \\ 0 & C - X_{n-p} \end{vmatrix} = \det(A - XI_p)\det(C - XI_{n-p}) = \chi_{u_F}\chi_C$$
Par conséquent χ_{u_F} divise χ_u.
2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base adaptée à la somme $F \oplus G$, c'est-à-dire $(e_1, \ldots, e_p)$ base de F et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ base de G. Dans cette base la matrice de u est de la forme
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
Où A est la matrice de u_F dans la base $(e_1, \ldots, e_p)$ et C est la matrice de u_G dans la base $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. On a
$$\chi_u = \begin{vmatrix} A - XI_p & 0 \\ 0 & C - XI_{n-p} \end{vmatrix} = \det(A - XI_p)\det(C - XI_{n-p}) = \chi_{u_F}\chi_{u_G}$$
D'où le résultat.

Définition 6.7.

On appelle ordre de multiplicité d'une valeur propre λ (d'un endomorphisme ou matrice), et on note m_λ, son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Remarque : Par définition de m_λ, on a

$$m_\lambda = \max\{k \in \mathbb{N} / \quad (X-\lambda)^k \quad \text{divise} \quad \chi_u\}$$

Ainsi, un entier $k \leq m_\lambda$ si, et seulement si, $(X-\lambda)^k$ divise χ_u.

Théorème 6.8.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit λ une valeur propre de u et m_λ son ordre de multiplicité. Alors

$$1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda$$

Démonstration :
Soit $p = \dim E_\lambda(u)$. Le sous espace vectoriel $E_\lambda(u)$ est stable par u, d'après la proposition précédente, $\chi_{u_{E_\lambda(u)}}$ divise χ_u. Puisque $u_{E_\lambda(u)} = \mathrm{Id}_{E_\lambda(u)}$, son polynôme caractéristique est donné par $\chi_{u_{E_\lambda(u)}} = (\lambda - X)^p$. Par suite $(\lambda - X)^p$ divise χ_u, d'où $p \leq m_\lambda$.

2.7 Theorème de Cayley-Hamilton

Théorème 7.1. (Théorème de Cayley-Hamilton)

1. *Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\chi_u(u) = 0$.*
2. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_M(M) = 0$*

En d'autres termes, le polynôme caractéristique de u (respectivement de M) annule u (respectivement M).

Démonstration :
Soit u un endomorphisme de E et $x \in E$ un vecteur non nul. Montrons que $\chi_u(u)(x) = 0$ (le cas de $x = 0$ est trivial). Notons F le sous espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N}) = \mathrm{Vect}(x, u(x), \ldots, u^n(x), \ldots)$ et

$$r = \max\{k \in [\![1, n]\!] / \text{ la famille } (x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x)) \text{ soit libre}\}$$

La famille $(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x))$ est une base de F. Cette famille est libre, il suffit donc de montrer qu'il est génératrice. Puisque $r+1 > r$, la famille $(x, u(x), \ldots, u^r(x))$ est liée. D'autre part la famille $(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x))$ est libre, donc $u^r(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x))$. Par une récurrence simple on vérifie que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x))$. Il vient alors que $F = \mathrm{Vect}(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x))$. Comme $u^r(x) \in F$, il existe $a_0, \ldots, a_{r-1} \in \mathbb{K}$ tels que $u^r(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \ldots + a_{r-1} u^{r-1}(x)$. Soit Q le polynôme $Q = X^r - a_{r-1}X^{r-1} - \ldots - a_1 X - a_0$.

L'espace vectoriel F est stable par u, notons que $\mathcal{B}_F = (x, u(x), \dots, u^{r-1}(x))$ est une base de F et

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(u_F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{r-1} \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant le polynôme caractéristique de χ_{u_F}. On a $\chi_{u_F} = \begin{vmatrix} -X & 0 & \dots & a_0 \\ 1 & -X & \dots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{r-1}-X \end{vmatrix}$,
à l'aide de l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + X^2L_3 + \dots + X^{r-1}L_r$, on obtient

$$\chi_u = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & a_0 + Xa_1 + \dots + X^{r-1}(a_{r-1}-X) \\ 1 & -X & \dots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{r-1}-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & -Q \\ 1 & -X & \dots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{r-1}-X \end{vmatrix}$$

Par un développement par rapport à la première ligne, il vient que

$$\chi_{u_F} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & -Q \\ 1 & -X & \dots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{r-1}-X \end{vmatrix} = -(-1)^{r+1}Q \begin{vmatrix} 1 & -X & \dots & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^r Q$$

Puisque χ_{u_F} divise χ_u, il existe alors un polynôme $S \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\chi_u = S\chi_{u_F} = (-1)^r SQ$. Par définition de Q, on a $Q(u)(x) = u^r(x) - a_{r-1}u^{r-1}(x) - \dots - a_1u(x) - a_0x = 0$, on en déduit alors que

$$\chi_u(u)(x) = (-1)^r S(u)\left(Q(u)(x)\right) = 0$$

Ceci montre que pour tout $x \in E$, $\chi_u(u)(x) = 0$. D'où $\chi_u(u) = 0$.

Corollaire 7.2.

1. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n *et* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Alors* π_u *divise* χ_u.
2. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors* π_M *divise* χ_M.

Démonstration :
χ_u est un polynôme annulateur de u donc π_u divise χ_u.

Exemple : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre 2. On sait $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$. Le théorème Cayley-Hamilton dit, pour les matrice carrées d'ordre 2, que

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$$

Proposition 7.3.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λ est une valeur propre de u si, et seulement si, λ est une racine de π_u. En d'autres termes, les valeurs propres de u sont les racines du polynômes minimal π_u.

Démonstration :
Si λ est une racine de π, d'après le résultat précédente, λ est aussi racine de χ_u, donc c'est une valeurs propre de u. Réciproquement, si λ est une valeur propre de u alors λ est une racine de π puisque π est un polynôme annulateur de u.

2.8 Sous espaces caractéristiques

Définition 8.1.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u de multiplicité m_λ. On appelle sous espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ qu'on note $N_\lambda(u)$, le sous espace vectoriel

$$N_\lambda(u) := \ker((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda})$$

Remarques :

1. $N_\lambda(u)$ est stable par u car les deux endomorphismes u et $(u - \lambda\, \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}$ commutent.
2. $E_\lambda(u) \subseteq N_\lambda(u)$.

Le lemme des noyaux donne le corollaire suivant :

Corollaire 8.2.

Les sous espaces caractéristiques associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

Démonstration :
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u. Clairement les polynômes $(X - \lambda_1)^{m_{\lambda_1}}, \ldots, (X - \lambda_r)^{m_{\lambda_r}}$ sont deux à deux premiers entre eux, on en déduit par le lemme des noyaux que la somme $\sum_{i=1}^r N_{\lambda_i}(u)$ est directe. En combinant le lemme des noyaux avec le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 8.3.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si le polynôme caractéristique de u est scindé, alors

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} N_\lambda(u)$$

De plus la projection de E sur chaque sous espace caractéristique $N_\lambda(u)$ et parallèlement au autres sous espaces caractéristiques est un polynôme en u.

Démonstration :
Immédiate.

Théorème 8.4. (polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent)

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Alors

$$\chi_u = (-1)^n X^n$$

Démonstration :
Montrons le résultat par récurrence sur $\dim E = n \geq 1$. Si $\dim E = 1$ et u un endomorphisme nilpotent de E alors $u = 0$, par conséquent $\chi_u = -X$. On suppose la propriété vraie pour tout endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n avec $n \geq 1$. Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension $n+1$. Puisque u est nilpotent, u est non injectif et il existe alors un vecteur non nul e_1 tel que $u(e_1) = 0$. Complétons maintenant (e_1) en une base $(e_1, \dots, e_{n+1})$ de E. La matrice de u dans cette base est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Avec $B \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comme u est nilpotent, sa matrice A est nilpotente et il existe $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$. Puisque A^p est de la forme

$$A^p = \begin{pmatrix} 0 & B' \\ 0 & C^p \end{pmatrix}$$

Avec $B' \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, la matrice C^p est nulle, par conséquent C est nilpotente. Si on note v l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice C, alors v est un endomorphisme nilpotent de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. Par hypothèse de récurrence le polynôme caractéristique de v est $\chi_v = (-1)^n X^n$. On en déduit, par un calcul par blocs, que

$$\chi_u = \begin{vmatrix} -X & B \\ 0 & C - XI_n \end{vmatrix} = (-X)\chi_C = (-X)\chi_v = (-1)^{n+1}X^{n+1}$$

La propriété est ainsi prouvée par récurrence.

Théorème 8.5.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit λ une valeur propre de u.

1. $\dim(N_\lambda(u)) = m_\lambda$.
2. *Soit u_λ l'endomorphisme induit par u dans $N_\lambda(u)$. Alors*

$$\chi_{u_\lambda} = (-1)^{m_\lambda}(X - \lambda)^{m_\lambda}$$

Démonstration :

1. On peut écrire $\chi_u = (X-\lambda)^{m_\lambda} P$ où P est un polynôme tel que $P(\lambda) \neq 0$. Vue que $u_\lambda - \lambda \, \mathrm{Id}_{N_\lambda(u)}$ est nilpotent ($(u_\lambda - \lambda \, \mathrm{Id}_{N_\lambda(u)})^{m_\lambda} = 0$), on a $\chi_{u_\lambda} = (-1)^d (X-\lambda)^d$, où

$d = \dim N_\lambda(u)$. Le deux polynômes $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ et P sont premiers entre eux, par le lemme des noyaux on a

$$E = \ker((u-\lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}) \oplus \ker(P(u)) = N_\lambda(u) \oplus F$$

Où $F = \ker(P(u))$ qui est un sous espace stable par u. Notons v l'endomorphisme induit par u dans F, on a alors

$$\chi_u = \chi_{u_\lambda}\chi_v = (-1)^d(X-d)^d\chi_v$$

λ n'est pas une valeur propre de v, en effet si λ est une valeur propre de v, alors il existe un vecteur non nul $x \in F$ tel que $v(x) = \lambda x$, et donc $u(x) = \lambda x$, ce qui vaut dire $x \in E_\lambda(u) \subseteq N_\lambda(u)$, on a donc un vecteur non nul $x \in N_\lambda(u) \cap F$, ce qui est impossible car la somme est directe.
Comme λ n'est pas une valeur propre de v, on a donc $\chi_v(\lambda) \neq 0$ (λ n'est pas une racine de χ_v). Par conséquent, de l'égalité $\chi_u = (-1)^d(X-\lambda)^d\chi_v = (X-\lambda)^{m_\lambda}P$, il vient que $m_\lambda = d$ c'est-à-dire $m_\lambda = d = \dim N_\lambda(u)$.

2. L'endomorphisme $v_\lambda = u_\lambda - \lambda\, \mathrm{Id}_{N_\lambda(u)}$ est un endomorphisme nilpotent de l'epsca vectoriel $N_\lambda(u)$, donc $\chi_{v_\lambda} = (-1)^{m_\lambda}X^{m_\lambda}$. D'où

$$\begin{aligned}
\chi_{u_\lambda} &= \det(u_\lambda - X\mathrm{Id}_{N_\lambda(u)}) = \det(u_\lambda - \lambda\mathrm{Id}_{N_\lambda(u)} - (X-\lambda)\mathrm{Id}_{N_\lambda(u)}) \\
&= \det(v_\lambda - (X-\lambda)\mathrm{Id}_{N_\lambda(u)}) = \chi_{v_\lambda}(X-\lambda) \\
&= (-1)^{m_\lambda}(X-\lambda)^{m_\lambda}
\end{aligned}$$