بِسمِ اللّٰهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Libre $N°$ 1

$\emptyset$ Théorie des ensembles $\mathscr{P}(E)$

MPSI 1

Rappel

✍ Si E est un ensemble , rappelons que $\mathscr{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E, ainsi les éléments de $\mathscr{P}(E)$ sont les parties de E.
✍ Rappelons aussi que $\emptyset$ désigne l'esemble vide.
✍ L'application identité de E est l'application $\mathrm{Id}_E : E \to E$, définie pour tout $x \in E$ par $\mathrm{Id}_E(x) = x$.

✍

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $n \leq f(n)$.

Exercice 2 Soit E un ensemble non vide, et $f : E \to E$ une application vérifiant ; $f \circ f = f$.
Montrer l'équivalence entre :

1. f injective,
2. f surjective, et
3. $f = \mathrm{Id}_E$.

PROBLÈME 1

Soit E un ensemble.

1. Montrer que si, A , B et C sont des parties de E alors :

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

2. Montrer que si A et B sont des parties de E, alors :
   (a) $A \cap B = A$ si, et seulement si, $A \subseteq B$, et
   (b) $A \cup B = A$ si, et seulement si, $B \subseteq A$.

   Dans la suite on fixe deux parties A et B de E et considère l'application $f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ définie pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$ par $f(X) = (X \cup A) \cap B$.
3. (a) Déterminer f dans les deux cas : $A = E$ et $B = \emptyset$.
   (b) Calculer : $f(E)$, $f(\emptyset)$, $f(\overline{A})$ et $f(\overline{B})$.
4. Montrer que f est croissante au sens de l'inclusion, c'est-à-dire que, pour X et X' deux parties de E vérifiant $X \subseteq X'$, on a $f(X) \subseteq f(X')$.

5. Soit Y une partie de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) Y admet un antécédent dans $\mathscr{P}(E)$ pour l'application f,
   (b) $A \cap B \subseteq Y \subseteq B$,
   (c) $f(Y) = Y$.
6. Montrer que $f \circ f = f$.
7. (a) Quelle est l'image de $\mathscr{P}(E)$ par f.
   (b) Montrer que f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$ et $B = E$.
   Exploiter le résultat de la question 5....
   (c) Montrer que f est constante si, et seulement si, $A \cap B = B$.
   (d) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les parties A et B pour que l'application f soit injective.
8. Résoudre l'équation $f(X) = A$.
   Indication : on pourra distinguer les deux cas $A \subseteq B$ et $A \nsubseteq B$

PROBLÈME 2

Définitions

Soit E un ensemble et $T \subseteq \mathscr{P}(E)$ (écoutez mois bien! T est un ensemble formé par des parties de E.).
✍ On dit que T est une algèbre sur E si ;
1. $\emptyset \in T$; (T contient l'ensemble vide),
2. Si $A \in T$ alors $\overline{A} \in T$;(T stable par passage au complementaire) ,
3. Si $A, B \in T$ alors $A \cup B \in T$; (T stable par union finie).

✍ On dit que T est une tribu si T vérifie les propriétés 1. et 2. de la définition précédente et : $(\star)$ pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de T, on a $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$ (T est stable par union dénombrable "ensemble d'indices est $\mathbb{N}$").
✍ On résume : une tribu sur E est une algèbre sur E dans laquelle la propriété 3. a été remplacée par la propriété $(\star)$.

Première partie :
Questions préliminaires.

Soient E , F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
1. Que vaut $f^{-1}(\emptyset)$? $f^{-1}(F)$?
2. Montrer que pour toute partie A de F on a : $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$.
3. Montrer que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de F on a : $f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$.
4. Montrer que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de F on a : $f^{-1}(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \cap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$.
5. Montrer que pour toute famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E on a :
   $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n} = \cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}$ et $\overline{\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}$

Deuxième partie :
Quelques exemples et propriétés.

6. **Exemples :**

(a) Tribu **Grossière** : Montrer que $T := \{\emptyset, E\}$ est une tribu sur E.

(b) Tribu **discrète** : Montrer que $T := \mathscr{P}(E)$ est une tribu sur E.

(c) Algèbre engendrée par une partie : Soit A une partie de E, montrer que $T := \{\emptyset, A, \overline{A}, E\}$ est une algèbre sur E (c'est aussi une tribu sur E).

7. **Propriétés :** Soit T une tribu sur un ensemble E.

   (a) Montrer que $E \in T$.

   (b) Montrer que pour toute famille d'éléments de T, on a $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$ (autrement dit T est stable par intersection dénombrable).

8. Montrer qu'une tribu est une algèbre.

Troisième partie :

Image réciproque et trace .

9. Soit $f : E \to F$ une application et T' une tribu sur F. Montrer que $T := \{f^{-1}(A)\ ,\ A \in T'\}$ est une tribu sur E.

10. Soit E un ensemble , B est une partie de E et T une tribu sur E. Montrer que $T_B := \{B \cap A\ ,\ A \in T\}$ est une tribu sur B.

End