بِسمِ اللّٰهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيم

Devoir Libre $N°$ 4

G

Characters of a finite Abelian group

$\widehat{G}$

À rendre le

Définition

✍ Rappelons que $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1.
✍ Rappelons aussi $\mathbb{C}^*$ muni de la multiplication est un groupe abélien.
✍ Si $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n-$ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.
✍ Si G est un groupe abélien fini. On appelle *caractère* de G tout morphisme de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$; l'ensemble des caractère de G est noté $\widehat{G}$.

✍

PROBLÈME

Dans tout le problème G est un groupe noté *multiplicativement* de neutre e.

Première partie : Questions préliminaires

1. Montrer que $\mathbb{U}$ est un groupe.
2. Justifier pour $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathbb{U}_n$ est un sous groupe de $\mathbb{U}$.
3. Soit G un groupe fini , $g \in G$, et $f : \mathbb{Z} \to G$ l'application définie par $f(k) = g^k$.
Montrer que f est un morphisme de groupes et que $\ker f = o(g)\mathbb{Z}$.

Deuxième partie : Un théorème de Lagrange

Soit G un groupe abélien fini d'ordre n, et a un élément de G. On pose $p = \prod_{g \in G} g$ *le produit de tous les éléments de* G.

4. Montrer que l'application $s : G \to G$ définie par $s(g) = ag$ est bijective et en déduire que $G = \{ag \ / g \in G\}$.
5. Montrer que $p = a^n p$.
Indication : exploiter le résultat de la question précédente
6. En déduire que $a^n = e$.
7. Montrer que $o(a)$ divise n.

Troisième partie : Groupe des caractères

Dans toute la suite G est un groupe abélien fini et θ le caractère de G défini par $\theta(g) = 1$ pour tout $g \in G$.
On définit sur $\widehat{G}$ une loi de composition interne (*noté multiplicativement*) par : pour $\varphi, \psi \in \widehat{G}$; $\varphi\psi$ est le caractère défini par $(\varphi\psi)(g) = \varphi(g)\psi(g)$ pour tout $g \in G$.

$\boxed{8.}$ Justifier que θ est l'élément neutre de $\widehat{G}$.

$\boxed{9.}$ Montrer que $\widehat{G}$ est un groupe abélien.

$\boxed{10.}$ Soit $\varphi \in \widehat{G}$ avec $\varphi \neq \theta$.

$\boxed{10.1}$ Justifier qu'il existe $g_0 \in G$ tel que $\varphi(g_0) \neq 1$.

$\boxed{10.2}$ Montrer que pour tout $g' \in G$, $\varphi(g')(\sum\limits_{g\in G} \varphi(g)) = \sum\limits_{g\in G} \varphi(g)$, et en déduire que $\sum\limits_{g\in G} \varphi(g) = 0$.

Quatrième partie : Un produit scalaire

$\boxed{11.}$ Soit $\varphi \in \widehat{G}$.

$\boxed{11.1}$ Soit $g \in G$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$; $\varphi(g^k) = (\varphi(g))^k$.

$\boxed{11.2}$ En déduire que pour tout $g \in G$, $|\varphi(g)| = 1$, puis que $\varphi(g^{-1}) = \overline{\varphi(g)}$.

$\boxed{12.}$ Pour $\varphi, \psi \in \widehat{G}$, on pose :

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \varphi(g)\psi(g^{-1}).$$

$\boxed{12.1}$ Montrer que, pour tout $\varphi \in \widehat{G}$; $\langle \varphi, \varphi \rangle = 1$.

$\boxed{12.2}$ Soient φ, ψ deux éléments distincts de $\widehat{G}$. Montrer que l'application $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ définie par $\chi(g) = \varphi(g)\psi(g^{-1})$ est un caractère non trivial (distinct de θ) de G, en déduire que $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$.