بِسمِ اللّهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Libre $N°$ 5

$n!$ Développement asymptotique de $n!$ $\sim$

À rendre le

Objectif

Le bute de ce problème est :
✍ De trouver un équivalent de $n!$: **Formule de Stirling**.
✍ Donner un développement asymptotique de $n!$.

PROBLÈME

Première partie :
Préliminaires

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

   1.1 Justifier que pour tout $k \geq 2$; $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

   1.2 En déduire que la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$, $v_n = \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

   2.1 Montrer que $v_n = -\frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

   2.2 En déduire que la suite $(S_n)_n$ est convergente. On note ℓ sa limite.

   2.3 Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente de limite $C = e^{\ell+1}$

3. Vérifier que $n! \sim C\sqrt{n}n^n e^{-n}$.

Deuxième partie :
Intégrale de Wallis

Le bute de cette partie est de démontrer que $C = \sqrt{2\pi}$.

Pour $n \in N$, on pose $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$ appelé *Intégrale de Wallis* .

1. Calculer w_0 et w_1.

2. Montrer que la suite $(w_n)_n$ est décroissante, et en déduire qu'elle est convergente.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $w_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(n!2^n)^2}\frac{\pi}{2}$ et $w_{2n+1} = \dfrac{(n!2^n)^2}{(2n+1)!}$.

5. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $w_{2n}w_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2(2n+1)}$.

6. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(w_{2n})^2 = \dfrac{\pi}{4}$.

7. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(w_{2n})^2 = \frac{\pi^2}{2}\dfrac{u_{2n}^2}{u_n^4}$.

8. En déduire la formule de Stirling $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Troisième partie :
Un développement asymptotique de $n!$

Notons α la limite de la suite $(\alpha_n)_n$ définie dans la première partie et $(R_n)_n$ la suite définie par $R_n = \alpha - \alpha_n$.

1. Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites a termes positifs avec $x_n \sim y_n$.

   On suppose que la suite $(V_n)_n$ définie par $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_n$ est convergente de limite x.

   1.1 Montrer que la suite $(U_n)_n$ définie par $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k$ est convergente, notons y sa limite.

   1.2 Montrer que $x - V_n \sim y - U_n$. (*Équivalence des restes*)

2. Montrer que $R_n \sim \dfrac{1}{n}$, puis que $\ln(\dfrac{u_n}{\sqrt{2\pi}}) \sim \dfrac{1}{12n}$.

3. En déduire que $\dfrac{u_n}{\sqrt{2\pi}} = 1 + \dfrac{1}{12n} + o(\dfrac{1}{n})$, puis que $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1 + \dfrac{1}{12n} + o(\dfrac{1}{n}))$.

FIN