بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Libre $N°$ 6

$\|T_n\|$ Polynôme de Tchebychev T_n

À rendre le

Notations

✍ On désigne par E_n l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynôme à coefficients réels et de degré $\leq n$, où n est un entier naturel .
✍ On pourra confondre les expressions : polynôme et fonction polynomiale.
✍ Si $P \in E_n$ on pose $\|P\| = \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$.

PROBLÈME

Première partie :
Existence et unicité et premières propriétés

1. Déterminer un polynôme T_n à coefficient réels vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

2. Justifier que $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$, et en déduire qu'un tel polynôme est unique.
On l'appelle le polynôme de Tchebychev d'indice n.
3. Donner une expression de $T_n(x)$, lorsque $x \in [-1,1]$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
5. Déterminer T_0 , T_1 et T_2.
6. Montrer que $\deg(T_n) = n$, et déterminer le coefficient dominant de T_n.
7. Montrer que les polynômes T_n et T_{n+1} sont premiers entre eux.
8. Monter que $\|T_n\| = 1$.

Deuxième partie :
Racines et extrema

9. Déterminer les racines de T_n.
10. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(x - \cos\theta_k)$, où $\theta_k = \cos(\dfrac{2k+1}{2n}\pi)$.
11. Pour k dans $\{0,1,\dots,n\}$, on pose $c_k = \cos(\dfrac{k\pi}{n})$
Montrer que pour tout $k \in \{0,1,\dots,n\}$, $|T_n(c_k)| = 1$, et que pour tout $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$, $T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k)$.
Les $n+1$ réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ sont appelés points de Tchebychev.

Troisième partie :
Majoration d'un polynôme sur $[1,+\infty[$

Soit $n \geq 2$, et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

$\boxed{12.}$ Montrer que pour tout i dans $\{0, n\}$, il existe un unique polynôme $L_i \in E_n$ tel que
$L_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$ On déterminera l'expression des polynômes L_i.
L_i s'appelle le i-ième polynôme de Lagrange.

$\boxed{13.}$ Montrer que, pour tout polynôme $P \in E_n$, $P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i$, en déduire que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de E_n.
Dans la suite, pour $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on prend $a_j = \cos((n-j)\frac{\pi}{n})$.

$\boxed{14.}$ Montrer que $T_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} L_i$.

$\boxed{15.}$ Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|$.

$\boxed{16.}$ Montrer que pour tout $r \in \mathbb{R}^*$, $T_n(\frac{r^2+1}{2r}) = \frac{r^{2n}+1}{2r^n}$, en déduire que pour tout $x \geq 1$,

$$1 \leq T_n(x) \leq (x + \sqrt{x^2+1})^n$$

$\boxed{17.}$ Montrer que pour tout $P \in E_n$ et pour tout $x \in [1, +\infty[$

$$|P(x)| \leq \|P\|(x + \sqrt{x^2+1})^n$$