بِسمِ اللّهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Libre $N°$ 7

$E_x(u)$

Stable subspace and cyclic endomorphisms

$\mathscr{C}(u)$

À rendre le

Notations et définitions

Dans tout le problème $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension $n \geq 2$, $\mathscr{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E, Id_E l'endomorphisme de E défini pour tout $x \in E$ par $\mathrm{Id}_E(x) = x$.
Soit u un endomorphisme de E :

✎ $u^0 = \mathrm{Id}_E$, et $u^k = u \circ u^{k-1}$ pour $k \geq 1$.

✎ $\mathscr{C}(u)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u, appelé commutant de u i.e $\mathscr{C}(U) = \{v \in \mathscr{L}(E)\ ,\ vu = uv\}$.

✎ Pour tout $x \in E$, $E_x(u)$ désigne le sous espace vectoriel de E engendré par la famille des vecteurs $\{u^k(x)\ ,\ k \in \mathbb{N}\}$.

✎ Un endomorphisme u de E est dit **cyclique**, s'il existe x dans E tel que $E_x(u) = E$.

✎ On dit qu'un sous espace vectoriel F de E est **stable** par u, lorsque $u(F) \subset F$.

✎ On dit que u est une **homothétie** de E, s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que $u = \lambda\,\mathrm{Id}_E$.

PROBLÈME

Première partie : Généralités

Soit u un endomorphisme de E.

1. Montrer que $\mathscr{C}(u)$ est une sous algèbre de $\mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que pour tout $x \in E$, $E_x(u)$ est le plus petit sous espace vectoriel de E, contenant x et stable par u.
3. Soit $x \neq 0$, on pose $p = \dim E_x(u)$, et q le plus grand des entiers k tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^{k-1})$ est libre.
   - 3.1 Montrer que $u^q(x)$ est combinaison linéaire des vecteurs $x, u(x), \dots, u^{q-1}(x)$.
   - 3.2 Montrer, par récurrence , que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à q, le vecteur $u^k(x)$ est combinaison linéaire des vecteurs $x, u(x), \dots, u^{q-1}(x)$.
   - 3.3 Montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est génératrice de $E_x(u)$.
   - 3.4 En déduire que $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est une base de $E_x(u)$, et que $p = q$.

4. Soit u est un endomorphisme de E tel que, pour tout x non nul de E, $\dim E_x(u) = 1$, on veut démontrer que u est une homothétie.

4.1 Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$, tel que $u(x) = \lambda_x x$.

4.2 Soient $x, y \in E$, et on suppose que la famille (x, y) est libre.
Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$
Indication : Calculer $u(x+y)$ de deux façons... introduire λ_{x+y}...

4.3 Montrer que si (x, y) est une famille liée de E, alors $\lambda_x = \lambda_y$.

4.4 En déduire que u est une homothétie.

Deuxième partie :
Commutant d'un endomorphisme cyclique.

Dans cette partie u désigne un endomorphisme cyclique.

5. Justifier, qu'il existe $x_0 \in E$, tel que la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E, et que $x_0 \neq 0$.
On fixe un tel x_0.

6. Montrer que $(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{n-1})$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E)$.

7. Soient v et w deux éléments de $\mathscr{C}(u)$. On suppose que $v(x_0) = w(x_0)$.

7.1 Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $v(u^i(x_0)) = w(u^i(x_0))$.
Indication : par récurrence sur i.

7.2 En déduire que $v = w$.

8. Justifier que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $u^i \in \mathscr{C}(u)$.

9. Soit $v \in \mathscr{C}(u)$.

9.1 Justifier l'existence de $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$, tel que
$v(x_0) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 u(x_0) + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_0)$.
On pose $w = \alpha\, \mathrm{Id}_E + \alpha_1 u + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1}$.

9.2 Montrer que $w \in \mathscr{C}(u)$.

9.3 En déduire que $v = w$

10. Déduire de ce qui précède, que $\mathscr{C}(u) = \mathrm{Vect}(u^i\ ,\ 0 \leq i \leq n-1)$.

Troisième partie :
Cas d'un endomorphisme nilpotent.

Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'ordre $p \geq 2$, i.e $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.
Soit $x_0 \in E$, tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

11. Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ est libre.

12. En déduire que $p \leq n$, puis que $u^n = 0$.

13. Montrer que u est cyclique si, et seulement si, $p = n$.