بِسمِ اللّٰهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir surveillé $N°$ 1

Il sera tenu compte,dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

$\emptyset$ $\mathscr{P}(E)$

MPSI 1 & 2

Définitions

Soit E un ensemble et $T \subseteq \mathscr{P}(E)$ (écoutez mois bien! T est un ensemble formé par des parties de E.).

✍ On dit que T est une algèbre sur E si ;

1. $\emptyset \in T$; (T contient l'ensemble vide),
2. Si $A \in T$ alors $\overline{A} \in T$;(T stable par passage au complementaire) ,
3. Si $A, B \in T$ alors $A \cup B \in T$; (T stable par union finie).

✍ On dit que T est une tribu si T vérifie les propriétés 1. et 2. de la définition précédente et : ($\star$) pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de T, on a $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$ (T est stable par union dénombrable "ensemble d'indices est $\mathbb{N}$").

✍ On résume : une tribu sur E est une algèbre sur E dans laquelle la propriété 3. a été remplacée par la propriété ($\star$).

✍

Exercice 1 Soient E , F deux ensembles , $f : E \to F$ une application et $\mathscr{S}$ une relation d'équivalence sur F. Montrer que la relation $\mathscr{R}$ définie sur E par :

$$\forall x, y \in E \quad ; \quad x\mathscr{R}y \Leftrightarrow f(x)\mathscr{S}f(y)$$

est une relation d'équivalence sur E.

Exercice 2 Soit $\mathscr{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \; ; \; x\mathscr{R}y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Z}$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

PROBLÈME

Première partie :

Questions préliminaires.

Soient E , F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

$\boxed{1.}$ Que vaut $f^{-1}(\emptyset)$? $f^{-1}(F)$?

2. Montrer que pour toute partie A de F on a : $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$.

3. Montrer que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de F on a : $f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$.

4. Montrer que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de F on a : $f^{-1}(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \cap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$.

5. Montrer que pour toute famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E on a :
$\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n} = \cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}$ et $\overline{\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}$

Deuxième partie :
Quelques exemples et propriétés.

6. **Exemples :**
   - 6.1 Tribu **Grossière** : Montrer que $T := \{\emptyset, E\}$ est une tribu sur E.
   - 6.2 Tribu **discrète** : Montrer que $T := \mathscr{P}(E)$ est une tribu sur E.
   - 6.3 Algèbre engendrée par une partie : Soit A une partie de E, montrer que $T := \{\emptyset, A, \overline{A}, E\}$ est une algèbre sur E (c'est aussi une tribu sur E).

7. **Propriétés :** Soit T une tribu sur un ensemble E.
   - 7.1 Montrer que $E \in T$.
   - 7.2 Montrer que pour toute famille d'éléments de T, on a $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$ (autrement dit T est stable par intersection dénombrable).

8. Montrer qu'une tribu est une algèbre.

Troisième partie :
Image réciproque et trace .

9. Soit $f : E \to F$ une application et T' une tribu sur F. Montrer que $T := \{f^{-1}(A)\ ,\ A \in T'\}$ est une tribu sur E.

10. Soit E un ensemble , B est une partie de E et T une tribu sur E. Montrer que $T_B := \{B \cap A\ ,\ A \in T\}$ est une tribu sur B.

End