بِسمِ اللّٰهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Concours Blanc

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

PCSI

☞ Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
☞ Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend deux exercices et un problème.
☞ Les candidats **doivent respecter** les numéros des questions (N'oubliez pas les numéros des questions !).

Exercice 1

On rappelle la formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$.

2. En déduire les valeurs de $A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} kx^k = nx(1+x)^{n-1}$, en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

4. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}$.

5. Pour $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$, exprimer $\binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$.

6. On lance n fois une pièce de monnaie , pour chaque lancer, on note p la probabilité d'avoir "PILE", on note X la variable aléatoire égale au nombre de "PILE" obtenus au cours de ces n lancers.

   6.1 Quelles sont les valeurs prises par X ?

   6.2 Pour $0 \leq k \leq n$, donner $p(X=k)$.

   6.3 Calculer $E(X)$.

   6.4 Déterminer $V(X)$.

Exercice 2

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 3 boules noires.
L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 3 boules noires.
On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie, on note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée est blanche, le tirage se fait dans U_1, sinon le tirage se fait dans U_2.
Pour $n \geq 1$, on note B_n l'événement : "la boule tirée au n-ème tirage est blanche", et $p_n = p(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35} p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour $n \geq 1$, la valeur de p_n.
4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

PROBLÈME

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.
Dans tout le problème, $\langle ., . \rangle$ désigne le *produit scalaire canonique* sur l'espace vectoriel E c'est-à-dire pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, on a

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Enfin, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de E.

Première partie :
Orthogonalité des sous espaces propres d'une matrice symétrique

Dans cette partie $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice *symétrique*. On note par f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A. Pour $x, y \in E$, notons X (respectivement Y) la matrice de X (respectivement de Y) dans la base canonique de E.

1. Vérifier que $\langle x, y \rangle = {}^t XY$.
2. Donner la matrice du vecteur $f(x)$ dans la base canonique de E.
3. Montrer $\langle f(x), y \rangle = {}^t XAY$.
4. Montrer que $\langle x, f(y) \rangle = {}^t XAY$
5. En déduire que pour tout $x, y \in E$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.
6. Soient α et β deux réels distincts $(\alpha \neq \beta)$, u et v deux vecteurs tels que $f(u) = \alpha u$ et $f(v) = \beta v$.
   - 6.1 Montrer que $\langle f(u), v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ et que $\langle f(u), v \rangle = \beta \langle u, v \rangle$.
   - 6.2 En déduire que $\langle u, v \rangle = 0$.
   - 6.3 En déduire que $\ker(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \perp \ker(f - \beta \mathrm{Id}_E)$.

Deuxième partie : Réduction d'une matrice

Dans la suite du problème $n=3$ (et donc $E=\mathbb{R}^3$) et A désigne la matrice

$$A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$\boxed{7.}$ La matrice A est-elle symétrique ?

$\boxed{8.}$ Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrer que $\det(A-\lambda I_3)=-(\lambda-\frac{1}{4})^2(\lambda-1)$.

$\boxed{9.}$ En déduire une condition nécessaire et suffisante pour l'inversibilité de la matrice $A-\lambda I_3$.

$\boxed{10.}$ Déterminer une base de $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$.

$\boxed{11.}$ Déterminer une base de $\ker(f-\dfrac{1}{4}\mathrm{Id}_E)$

Pour la suite de cette partie, on considère les vecteurs $\varepsilon_1=(1,1,1,)$, $\varepsilon_2=(1,-1,0)$ et $\varepsilon_3=(1,0,-1)$.

$\boxed{12.}$ Calculer $f(\varepsilon_1)$, $f(\varepsilon_2)$ et $f(\varepsilon_3)$.

$\boxed{13.}$ Montrer que $\mathscr{B}'=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est une base de E.

$\boxed{14.}$ Déterminer D la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

$\boxed{15.}$ Déterminer P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}'$, puis déterminer P^{-1}.

$\boxed{16.}$ Donner une relation entre les matrices A, D, P et P^{-1}.

$\boxed{17.}$ Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer D^n.

$\boxed{18.}$ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $A^n=PD^nP^{-1}$.

$\boxed{19.}$ En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$A^n=\frac{1}{3\times4^n}\begin{pmatrix}4^n+2&4^n-1&4^n-1\\4^n-1&4^n+2&4^n-1\\4^n-1&4^n-1&4^n+2\end{pmatrix}$$

Troisième partie : Application : Étude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.
À l'étape $n=0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :
• le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n, plus précisément il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes ;
• pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note A_n l'événement "le pion se trouve en A à l'étape n", B_n l'événement "le pion se trouve en B à l'étape n, et C_n l'événement " le pion se trouve en C à l'étape n". On note également

$$a_n=p(A_n)\ ,\ b_n=p(B_n)\ ,\ c_n=p(C_n)\ ,\ \textbf{et}\ U_n=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$$

20. Calculer les nombres a_n, b_n et c_n, pour $n = 0$ et $n = 1$.

21. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$.
indication : appliquer la formule des probabilités totales.

22. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

23. En exploitant les formules précédentes, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$, où A est la matrice définie dans la deuxième partie.

24. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.

25. En déduire l'expression, en fonction de n, de chacune des probabilités suivantes : $p(A_n)$, $p(B_n)$ et $p(C_n)$.

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END