بِسمِ اللّٰهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Libre $N°$ 4

η Limites et continuités ε

PCSI 1

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.
☞ Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est k-Lipschitzienne si pour tout $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.
☛ On dit que f est Lipschetzienne, s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$, telle que f soit k-Lipschitzienne.

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ continue et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = 0$. Le but de cet exercice et de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A$, $|f(x+1) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geq A$,
   $|f(x+n) - f(x)| \leq n\frac{\varepsilon}{2}$.
3. On pose $M = \sup\limits_{[A,A+1]} |f|$. Justifier la définition de M.
   Montrer que $\forall x \geq A$,
   $|f(x)| \leq M + (x - A)\frac{\varepsilon}{2}$.
4. En déduire l'existence de $A' > 0$, tel que $\forall x \geq A'$, $|f(x)| \leq \varepsilon|x|$.
5. Conclure.
6. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue telle que :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2},\ \ f(xy) = f(x) + f(y)$$
   Montrer que :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} xf(x) = 0$
7. Application : Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$

PROBLÈME 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que f est un point fixe de f si $f(x) = x$.
On dit que f est stable pour I, si $f(I) \subset I$.
On dit que f est contractante si, il existe $\lambda \in [0,1[$ appelé coefficient de contraction, telle que f soit λ-Lipschitzienne.

Première partie :
Quelques études d'existence et d'unicité

1. Dans cette question, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$. Montrer que f admet un unique point fixe sur l'intervalle $[0,1]$.
2. Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et continue sur $I = [a, b]$ tel que $f([a,b]) \subset [a,b]$.
   (a) Démontrer que f possède un point fixe sur $[a,b]$.
   (b) Dans cette question on suppose que f est strictement croissante, cette hypothèse est-elle nécessaire pour assurer l'unicité du point fixe ?
   (c) Dans cette question on suppose que f est strictement décroissante, cette hypothèse est-elle nécessaire pour assurer l'unicité du point fixe ?

Deuxième partie :
Un théorème de point fixe

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $I = [a,b]$.
On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que : f est contractante , de coefficient de contraction λ et I stable par f.

3. Démontrer que f est continue sur I.
4. Montrer que admet un unique point fixe $\alpha \in I$.
5. On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 \in I$ et $an \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Quelle hypothèse permet d'assurer que la suite $(u_n)_n$ est bien définie ?
   (b) Montrer que $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$ et $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$.
   (c) Démontrer que $(u_n)_n$ est convergente de limite α.