بِسمِ اللَّهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Libre $N°$ 5

f' Darboux et Taylor à l'ordre 2 f''

PCSI 1

Rappel

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 1 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue dérivable sur $[a, b]$.

1. Dans cette question on suppose que $f'(a)f'(b) < 0$.
   (a) Monter que f n'est pas strictement monotone.
   (b) En déduire que f n'est pas injective.
   (c) Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Montrer que si y est un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = y$.

PROBLÈME

Première Partie
Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = \dfrac{\alpha}{t} + \dfrac{\beta t}{2}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Étudier les variation de g.
2. Montrer que g est minorée et qu'il atteint sa borne inférieure.

Deuxième Partie
Formule de Taylor à l'ordre 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Soient $x, y \in I$ avec $x \neq y$ et A un réel. On note par h la fonction définie sur I, par $h(t) = f(t) - f(x) - (t - x)f'(x) - \dfrac{A}{2}(t - x)^2$.

1. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I

2. Déterminer A pour que $h(y) = 0$.
   Dans la suite A est choisit de sorte que $h(y) = 0$.
3. Montrer qu'il existe c_1 entre x et y tel que $h'(c_1) = 0$.
4. Calculer $h'(x)$.
5. En déduire qu'il existe c dans I tel que $h''(c) = 0$.
6. En déduire que $f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) + \frac{1}{2}(y-x)f''(c)$.
7. Montrer le résultat précédent dans le cas $x = y$.

Troisième Partie
Une majoration de f'

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$.
On pose $M_0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$

1. Justifier l'existence de M_0 et M_2.
2. Montrer que pour tous $x, h \in \mathbb{R}$;

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2}{2} M_2$$

$$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{h^2}{2} M_2$$

3. En déduire que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$;

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2$$

4. Montrer alors que f' est bornée. On pose $M_1 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$
5. Montrer que $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.