بِسمِ اللَّهِ الرَّحمٰنِ الرَّحيمِ

Devoir Libre $N°$ 6

f' **Relèvement des applications de classe $\mathscr{C}^1$** f

PCSI 1

Questions de Cours

1. Rappeler le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Rappeler le théorème de Rolle.
3. Rappeler le théorème des acroissements finis.

PROBLÈME

Relèvement des applications de classe $\mathscr{C}^1$

Le but de ce problème est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 0.1 (Théorème de relèvement)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $|f| = 1$.
Alors
Elle existe une fonction $\lambda : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, telle que pour tout $x \in I$, $f(x) = e^{i\lambda(x)}$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur I et à valeurs complexes.

Première partie
Une question préliminaire

1. Montrer que si $g : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors elle est constante.
Indication : ˙˙˙IΛꞱ

Deuxième partie
Le résultat

Dans cette partie f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $|f| = 1$ c'est-à-dire $\forall x \in I$, $|f(x)| = 1$.

2. Justifier que $\overline{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimer $\left(\overline{f}\right)'$ en fonction de $\overline{f'}$.

3. Montrer que $f'\overline{f} + f\overline{f'} = 0$.
Indication : remarquer que $|f|^2 = 1$...

4. En déduire que la fonction $\dfrac{f'}{if}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

5. Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}$ une primitive de $\frac{f'}{if}$ (justifier l'existence d'une telle primitive). Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $f = ce^{i\alpha}$ (c-à-d : $\forall x \in I, f(x) = ce^{i\alpha(x)}$).
Indication : on pourra considérer la fonction $fe^{-i\alpha}$...

6. Vérifier que $|c| = 1$.

7. En déduire l'existence d'une fonction $\lambda : I \to \mathbb{R}$ telle que $f = e^{i\lambda}$ (c-à-d : $\forall x \in I, f(x) = e^{i\lambda(x)}$)

8. Soit $\beta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f = e^{i\beta}$.
Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\forall x \in I$, $\lambda(x) = \beta(x) + 2k\pi$
Indication : exploiter le résultat de la question préliminaire...

Troisième partie
Une généralisation

Dans cette partie f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que : $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$

9. Montrer qu'il existe une fonction $\lambda : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\forall x \in I \ , \ f(x) = |f(x)|e^{i\lambda(x)}$$

Quatrième partie
Une application

Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $\forall x \in I$, $a^2(x) + b^2(x) = 1$.

10. Montrer qu'il existe une application $\theta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\forall x \in I$,

$$a(x) = \cos(\theta(x)) \quad \text{et} \quad b(x) = \sin(\theta(x))$$

.

END