بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيم

Devoir Libre $N°$ 7

y' Fonctions usuelles, intégrales et équations différentielles $\int$

PCSI 1

rappel

$\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1 On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t+\sqrt{1-t^2}}dt$.

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t+\sqrt{1-t^2}}dt$.
2. Calculer $I + \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t+\sqrt{1-t^2}}dt$.
3. En déduire la valeur de I.

PROBLÈME

L'objectif du problème est d'étudier les ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ suivants :
$\mathscr{E} = \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y)\}$
$\mathscr{F}$ est la partie constituée des éléments f de $\mathscr{E}$ telle que :

1. f n'est pas la fonction identiquement nulle,
2. f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Première Partie
Étude de $\mathscr{E}$

1. Montrer que la fonction cos est dans l'ensemble $\mathscr{E}$.
2. Démontrer la formule : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$.
   En déduire que la fonction ch est dans $\mathscr{E}$.
3. Soit f un élément de $\mathscr{E}$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$ est un élément de $\mathscr{E}$.
4. On fixe un élément f de $\mathscr{E}$.

4.1 Montrer que $f(0)=0$ ou $f(0)=1$.

4.2 Montrer que si $f(0)=0$, alors f est la fonction identiquement nulle.

4.3 Montrer que si $f(0)=1$, alors f est une fonction paire.

Deuxième Partie
Une équation différentielle

Dans cette partie on fixe un élément f de $\mathscr{E}$ tel que $f(0)=1$.

1. Montrer que pour chaque réel $r>0$, on a :

1.1 $\forall x\in\mathbb{R}\,,\ \displaystyle\int_0^r f(x+y)dy=\int_x^{x+r} f(u)du.$

1.2 $\forall x\in\mathbb{R}\,,\ 2f(x)\displaystyle\int_0^r f(y)dy=\int_x^{x+r} f(u)du+\int_{x-r}^{x} f(v)dv.$

2. Montrer que l'on peut choisir $r>0$, de façon à rendre strictement positive la constante $\displaystyle\int_0^r f(y)dy$. Dans la suite de cette question on fixe un réel $r>0$ tel que $\displaystyle\int_0^r f(y)dy>0$.

2.1 Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2.2 Montrer que f est en fait de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2.3 Prouver l'existence d'une constante $c>0$ telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\,,\ cf'(x)=f(x+r)-f(x-r)$$

3. En déduire l'existence d'une constante réelle λ telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\,,\ f''(x)=\lambda f(x)$$

Troisième Partie
Conclusion

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''=\mu y$, en séparant les cas $\mu<0$, $\mu=0$ et $\mu>0$.

2. En déduire tous les éléments de $\mathscr{E}$.

3. Donner tous les éléments de $\mathscr{F}$.

END