بِسمِ اللَّهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيم

Devoir Libre $N°$ 8

$o(u_n)$ Développement asymptotiques $\sim$

PCSI 1

Rappel

On rappel que $x_n \sim y_n$ si $x_n = y_n + o(y_n)$.

Exercice 1 Déterminer un $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\operatorname{sh}(x)}$

PROBLÈME

Développement asymptotique d'une suite

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ , \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$$

Première Partie
Étude de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.
2. En déduire que pour tout $k \geq 4$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{\ln k}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln x}{x} dx$$

3. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
4. En déduire l'existence de trois constantes a, b, c telles que, pour tout $n \geq 4$, on ait :

$$\frac{1}{2}\ln^2(n+1) - a \leq S_n - b \leq \frac{1}{2}\ln^2(n) - c$$

.

5. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Deuxième Partie
Recherche d'un équivalent de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

6. Montrer que $\ln^2(n+1) \sim \ln^2 n$.
7. En déduire que $S_n \sim \frac{1}{2}\ln^2 n$.

Troisième Partie
Étude asymptotique de la suite $v_n = S_n - \frac{1}{2}\ln^2 n$

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ , \quad v_n = S_n - \frac{1}{2}\ln^2 n$$

8. Montrer que pour tout $n \geq 3$, $v_{n+1} - v_n \leq 0$.
9. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   Dans la suite, la limite de la suite $(v_n)_n n \in \mathbb{N}^*$ sera notée l.
10. Une application :
    On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{\ln k}{k}$.
11. Pouver que pour tout entier naturel non nul n on a, $u_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
12. On admet qu'il existe un réel γ tel que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.
    En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.
13. En déduire que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.
14. Que peut-on déduire au sujet de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

END