بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Libre $N°$ 9

f Espaces vectoriels E

PCSI 1

Rappel

Un endomorphisme de E est une application linéaire de E vers E.

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1. Montrer que pour tout vecteur non nul $x \in E$, il existe $\lambda_x \in E$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
2. Soient $x, y \in E$ deux vecteurs non nuls.
3. Montrer que si la famille (x, y) est liée alors $\lambda_x = \lambda_y$.
4. Montrer que si la famille (x, y) est libre alors $\lambda_x = \lambda_y$. (Ind : on pourra considérer le vecteur $x + y$).
5. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \,\mathrm{Id}_E$.

Exercice 2
Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker f^k \subseteq \ker f^{k+1}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}\, f^{k+1} \subseteq \mathrm{Im}\, f^k$.
3. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker f^p = \ker f^{p+1}$. Montrer que tout $k \geq p$, $\ker f^p = \ker f^k$.
4. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Im}\, f^p = \mathrm{Im}\, f^{p+1}$. Montrer que tout $k \geq p$, $\mathrm{Im}\, f^p = \mathrm{Im}\, f^k$.

PROBLÈME
Endomorphisme vérifiant $f^2 + \mathrm{Id}_E = 0$

First Part
Un exemple

Dans cette partie E désigne un espace vectoriel de dimension et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E. On considère l'unique endomorphisme de E vérifiant

$$f(e_1) = e_2 \ , \ f(e_2) = -e_1 \ , \ f(e_3) = e_4 \ , \ f(e_4) = -e_3$$

1. Calculer $f^2(e_1)$ et $f^2(e_2)$.
2. Calculer $f^2(e_3)$ et $f^2(e_4)$.
3. Montrer que pour tout $x \in E$, $f^2(x) = -x$.
4. En déduire que $f^2 + \mathrm{Id}_E = 0$.

Second part
Propriétés

Dans cette partie E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^2 + \underset{E}{\mathrm{Id}} = 0$$

5. Montrer que f est isomorphisme et déterminer f^{-1}.
6. Soit $x \in E$ un vecteur non nul.
   - 6.1 Vérifier que $f(x)$ est non nul.
   - 6.2 Montrer que la famille $(x, f(x))$ est libre.
7. Soit $x, y \in E$ tel que la famille $(x, f(x), y)$ est libre. Montrer que la famille $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.

END