Devoir Libre $N°$ 1

z Nombres complexes $\overline{z}$

PCSI

Rappel

✍ $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \;/ |z| = 1\} = \{e^{i\theta} \;/\theta \in \mathbb{R}\}$.
✍ $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \;/ z^n = 1\} = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \;/\; k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

✍

Exercice 1
Résoudre l'équation : $z^{11} = z$.

Exercice 2
On considère l'équation : (E) $\quad z^8 = |z|^2$.

1. Soit z un complexe solution de (E), montrer que $z = 0$ ou $|z| = 1$.
2. Résoudre l'équation (E).

Exercice 3
Linéariser $\cos^3(x)$.

Exercice 4
On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $u = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $v = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1. Que vaut ω^7.
2. Montrer que u et v sont conjugués.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(u) > 0$.
4. Calculer $u + v$.
5. Calculer uv.
6. En déduire les valeurs de u et v.

PROBLÈME
Équations complexes

Première partie : Questions préliminaires

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\overline{z} = \dfrac{|z|^2}{z}$.
2. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.
3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ (un complexe non nul).

3.1 Vérifier que $\dfrac{z}{\overline{z}} \in \mathbb{U}$.

3.2 En déduire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}\overline{z}$.

Deuxième partie : Équation $z + z' = -1$ dans $\mathbb{U}$

Soient $z, z' \in \mathbb{U}$ tels que $z + z' = -1$.

4. Vérifier que $|z+1| = 1$

5. Montrer que $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z'} = -1$.

6. Montrer que $zz' = 1$.

7. En déduire $z' = \overline{z}$.

8. Montrer que $\mathrm{Re}(z) = -\dfrac{1}{2}$.

9. Montrer que $z = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ou $z = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

Troisième partie : Équation $a + b + c = r$

Soit r un réel strictement positif, a, b et c trois nombres complexes tels que :

$$|a| = |b| = |c| = r \quad \text{et} \quad a + b + c = r$$

10. Montrer que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{r}$.

11. En déduire que $ab + bc + ac = \dfrac{abc}{r}$.

12. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$.

12.1 Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = z^3 - rz^2 + \frac{abc}{r}z - abc$$

12.2 Calculer $P(r)$.

12.3 En déduire que l'un des complexes a, b, c est égale à r.

END