Devoir Libre N° 1

E **Ensembles et applications** $\emptyset$

PCSI

Questions de Cours

1. Rappeler la définition d'une application injective.
2. Rappeler la défnition d'une application surjective.
3. Soit $f : E \to F$ une application, A une partie de E et B une partie de F. Rappeler la définition de l'image directe $f(A)$ et de l'image réciproque $f^{-1}(B)$.
   Completer la caractérisation suivante : $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow \ldots$

Exercice 1

1. On considère l'assertion suivante :
   $\mathscr{P}$: Tout nombre réel est le carré d'un nombre réel positif .
   - 1.1 Écrire à l'aide des quantificateurs l'assertion $\mathscr{P}$.
   - 1.2 Donner la négation de l'assertion $\mathscr{P}$.
   - 1.3 L'assertion $\mathscr{P}$ est-elle vraie ?
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application, et Q l'assertion :
   Q : f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
   - 2.1 Écrire à l'aide des quantificateurs l'assertion Q.
   - 2.2 Donner la négation de l'assertion Q.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,,\quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - 3.1 Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.
   - 3.2 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$.

PROBLÈME

Étude d'une application

Première partie :
Questions préliminaires

Soit $f : E \to F$ une application, C et D deux parties de F

$\boxed{1.}$ Montrer que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

$\boxed{2.}$ Montrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

$\boxed{3.}$ Montrer que si $C \subseteq D$, alors $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$.

$\boxed{4.}$ Soit $x \in E$. Montrer que $x \in f^{-1}\left(\overline{C}\right)$ si, et seulement si, $x \notin f^{-1}(C)$.
En déduire que $f^{-1}\left(\overline{C}\right) = \overline{f^{-1}(C)}$.

$\boxed{5.}$ Vérifier que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(F) = E$.

Deuxième partie :
Propriétés d'une application

Soit $f : E \to F$ une application, A une partie de E, et $\varphi : \mathscr{P}(F) \to \mathscr{P}(E)$ l'application définie, pour tout $X \in \mathscr{P}(F)$, par

$$\varphi(X) = A \setminus f^{-1}(X)$$

$\boxed{6.}$ Justifier, que pour tout $X \in \mathscr{P}(F)$, $\varphi(X) = A \cap \overline{f^{-1}(X)}$

$\boxed{7.}$ Déterminer $\varphi(\emptyset)$ et $\varphi(F)$.

$\boxed{8.}$ Soient X et X' deux parties de F.

$\boxed{8.1}$ Montrer que $\varphi(X \cup X') = \varphi(X) \cap \varphi(X')$.

$\boxed{8.2}$ Montrer que $\varphi(X \cap X') = \varphi(X) \cup \varphi(X')$.

$\boxed{8.3}$ Montrer que si $X \subseteq X'$, alors $\varphi(X') \subseteq \varphi(X)$.

$\boxed{9.}$ Pour $X \in \mathscr{P}(F)$. Justifier que $\varphi\left(\overline{X}\right) = A \cap f^{-1}(X)$.

$\boxed{10.}$ Dans la suite, on suppose que $A = E$ et que f est surjective.

$\boxed{10.1}$ Soient $X, X' \in \mathscr{P}(E)$ telles que $f^{-1}(X) = f^{-1}(X')$. Montrer que $X = X'$.

$\boxed{10.2}$ En déduire que φ est injective.

END