بِسمِ اللَّهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Surveillé $N°$ 3

sup

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

inf

PCSI 1

Questions de Cours

1. Soit $f : E \to F$ une application A une partie de E et B une partie de F. Rappeler la définition de $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.
2. Rappeler la défintion d'un majorant d'une partie A de $\mathbb{R}$.
3. Rappeler la définition de la borne supérieure d'une partie A .
4. Rappeler l'axiome de la borne supérieure.
5. Donner la caractérisation (epsilonisée) de la borne supérieure.

Exercice 1
Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+2y+z &= 1 \\ 2x+y+2z &= 2 \\ x-y+3z &= 1 \end{cases}$$

Exercice 2
Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+y+z+t+2s &= 2 \\ 2x+y+2z+2t+s &= 0 \end{cases}$$

Exercice 3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [x + \frac{i}{n}] - [nx]$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in [0, \frac{1}{n}[$, $f(x) = 0$.

3. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{n-1} [x + \frac{i}{n}] = [nx]$

PROBLÈME

Étude d'une application

Dans tout le problème A désigne la partie suivante :

$$A = \{p + q\sqrt{2} \ / \ p, q \in \mathbb{Z}\}$$

On pourra utiliser, sans démonstration, que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Première partie : Questions préliminaires

1. Montrer que si $x, y \in A$ alors $x + y \in A$ et $x - y \in A$.
2. Soit $x = p + q\sqrt{2} \in A$ où $p, q \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $x = 0$, alors $p = q = 0$.
3. Soit $x \in A$.
   - 3.1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nx \in A$.
   - 3.2 Vérifier que $-x \in A$, puis que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $nx \in A$.

Deuxième partie : Une borne inférieure

Dans toute la suite A_+^* désigne la partie :

$$A_+^* = A \cap \mathbb{R}_+^*$$

4. Montrer que $A_+^* \neq \emptyset$
5. En déduire que A_+^* admet une borne inférieure.
   Dans la suite du problème on note α la borne inférieure de A_+^* c'est-à-dire $\alpha = \inf A_+^*$
6. On suppose dans cette question que $\alpha \in A_+^*$.
   - 6.1 Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\alpha \in A$.
     On pose $N = [\frac{1}{\alpha}]$ (la partie entière de $\frac{1}{\alpha}$).
   - 6.2 Montrer que $1 - N\alpha \in A$ et que $0 \leq 1 - N\alpha < \alpha$.
   - 6.3 En déduire que $1 = N\alpha$. Trouver alors une contradiction.
7. Justifier que $\alpha \notin A_+^*$.
8. Montrer que $\alpha = 0$.

Deuxième partie : Densité

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.

9. Montrer qu'il existe $a \in A_+^*$ tel que $0 < a < y - x$.
10. Vérifier que $\frac{y}{a} - \frac{x}{a} > 1$. En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x < na < y$.
11. En déduire que A est une partie dense dans $\mathbb{R}$.

END