بِسمِ اللّٰهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Surveillé N° 3

sup

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

inf

PCSI 1

Questions de Cours

Cours

Exercice 1

$$\begin{cases} x+2y+z &= 1\\ 2x+y+2z &= 2\\ x-y+3z &= 1\end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Rightarrow} \begin{cases} x+2y+z &= 1\\ -3y &= 0\\ -3y+2z &= 0\end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Rightarrow} \begin{cases} x+2y+z &= 1\\ -3y &= 0\\ 2z &= 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= 1\\ y &= 0\\ z &= 0\end{cases}$$

Exercice 2

$$\begin{cases} x+y+z+t+2s &= 2\\ 2x+y+2z+2t+s &= 0\end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Rightarrow} \begin{cases} x+y+z+t+2s &= 2\\ -y-3s &= -4\end{cases}$$

Les inconnues principales : x et y.
Les inconnues secondaires : z , t et s.
On a donc $\begin{cases} x &= -y-z-t-2s+2=-z-t+s-2\\ y &= -3s+4\end{cases}$, d'où

$$S=\{(-z-t+s-2,-3s+4,z,t,s)\in\mathbb{R}^5\ /\ z,t,s\in\mathbb{R}\}$$

Exercice 3 $\boxed{1.}$

$$\begin{aligned} f(x+\frac{1}{n}) &= \sum_{i=0}^{n-1}[x+\frac{1}{n}+\frac{i}{n}]-[nx+1]\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}[x+\frac{i+1}{n}]-[nx]-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}[x+\frac{i}{n}]-[nx]-1\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}[x+\frac{i}{n}]+\underbrace{[x+1]}_{\text{le terme d'indice } i=n}-\underbrace{[x]}_{\text{le terme d'indice } i=0}-[nx]-1\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}[x+\frac{i}{n}]-[nx]\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

2. Soit $x \in [0, \frac{1}{n}[$.
   On a $nx \in [0,1[$, donc $[nx] = 0$.
   Si i est un entier compris entre 0 et $n-1$ alors $0 \leq x+\frac{i}{n} < \frac{1}{n}+\frac{n-1}{n} = 1$ d'où $[x+\frac{i}{n}] = 0$, il vient alors que $f(x) = 0$.
3. La fonction f est $\frac{1}{n}$-périodique et nulle sur $[0, \frac{1}{n}[$ (un intervalle de longueur $\frac{1}{n}$), donc nulle sur $\mathbb{R}$.

PROBLÈME

Étude d'une partie

Dans tout le problème A désigne la partie suivante :

$$A = \{p+q\sqrt{2} \;/\; p, q \in \mathbb{Z}\}$$

On pourra utiliser, sans démonstration, que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Première partie : Questions préliminaires

1. Si $x, y \in A$ alors ils existent $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$ tels que $x = p+q\sqrt{2}$ et $y = p'+q'\sqrt{2}$. Donc $x+y = (p+p')+(q+q')\sqrt{2} \in A$ et $x-y = (p-p')+(q-q')\sqrt{2} \in A$.
2. Soit $x = p+q\sqrt{2} \in A$ où $p, q \in \mathbb{Z}$. Supposons que $x = 0$ donc $-p = q\sqrt{2}$. Si $q \neq 0$ alors $\sqrt{2} = \frac{-p}{q} \in \mathbb{Q}$ (contradiction !). Par suite $q = 0$ et donc $p = 0$.
3. Soit $x \in A$.
   - 3.1 Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
     Pour $n = 0$: $nx = 0 = 0+0\sqrt{2} \in A$.
     Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $nx \in A$. On a $(n+1)x = nx+x$ et comme $x \in A$ et $nx \in A$, alors (par le résultat de la première question), $nx+x \in A$, i.e $(n+1)x \in A$.
   - 3.2 On a $0 \in A$ et $x \in A$, par le résultat de la première question $-x = 0-x \in A$.
     Soit $n \in \mathbb{Z}$, si $n \geq 0$, alors $nx \in A$. Si $n < 0$ alors $-n \in N$, et donc $(-n)x \in A$, c'est-à-dire $-nx \in A$, par le résultat précédent $nx = -(-nx) \in A$.

Deuxième partie : Une borne inférieure

Dans toute la suite A_+^* désigne la partie :

$$A_+^* = A \cap \mathbb{R}_+^*$$

4. On a $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in A$ et $1 \in \mathbb{R}_+^*$ donc $A_+^* \neq \emptyset$.

5. A_+^* est non vide et minorée par 0, d'après l'axiome de la borne supérieure, il admet une borne inférieure.
Dans la suite du problème on note α la borne inférieure de A_+^* c'est-à-dire $\alpha = \inf A_+^*$

6. On suppose dans cette question que $\alpha \in A_+^*$.

   6.1 On a $\alpha \in A$ donc (par le résultat de la question 3.1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\alpha \in A$.
   On pose $N = [\frac{1}{\alpha}]$ (la partie entière de $\frac{1}{\alpha}$).

   6.2 On a $1 \in A$ et $N\alpha \in A$ alors $1 - N\alpha \in A$.
   Par définition de la partie entière $N \leq \frac{1}{\alpha} < N + 1$, donc (en multipliant par $\alpha > 0$), $N\alpha \leq 1 < N\alpha + \alpha$, d'où $0 \leq 1 - N\alpha < \alpha$.

   6.3 Si $1 \neq N\alpha$ alors $1 - N\alpha > 0$, et donc $1 - N\alpha A \cap \mathbb{R}_+^* = A_+^*$ et $1 - N\alpha < \alpha$, contradiction avec le fait que α est la borne inférieure de A_+^*. Il vient alors que $1 = N\alpha$.
   Puisque $\alpha \in A$, alors ils existent $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha = p + q\sqrt{2}$, d'où $1 = N\alpha = Np + Nq\sqrt{2}$, ou encore $(Np-1)+Nq\sqrt{2} = 0$, par le résultat de la question 2, on a $Np-1 = 0$ et $Nq = 0$, comme $N \neq 0$ car $N\alpha = 1$, alors $q = 0$, et donc $p = \alpha > 0$, mais $Np = 1$ implique $p = 1$, d'où $\alpha = 1$. On a donc $1 = \inf A_+^*$ ce qui est une contradiction car (par exemple) $2 - \sqrt{2} \in A_+^*$ et $2 - \sqrt{2} < 1$.

7. L'hypothèse $\alpha \in A_+^*$ conduit à une contradiction (question précédente) donc $\alpha \notin A_+^*$.

8. Par l'absurde on suppose que $\alpha \neq 0$ donc $\alpha > 0$. Par la caractérisation de la borne inférieure avec $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} > 0$, il existe $a_2 \in A_+^*$ tel que $\alpha \leq a_2 < \alpha + \varepsilon = \alpha + \frac{\alpha}{2}$. Puisque $a_2 \in A_+^*$ et $\alpha \notin A_+^*$ alors $\alpha < a_2$, en appliquant la caractérisation de la borne inférieure, il existe $a_1 \in A_+^*$ tel que $\alpha \leq a_1 < a_2$ ou encore $\alpha < a_1 < a_2$ (car $a_1 \neq \alpha$), on a donc $\alpha \leq a_1 < q_2 < \alpha + \frac{\alpha}{2}$, d'où $0 < a_2 - a_1 < (\alpha + \frac{\alpha}{2}) - \alpha = \frac{\alpha}{2} < \alpha$, contradiction avec le fait que $\alpha = \inf A_+^*$, $a_2 - a_1 \in A_+^*$ et $a_2 - a_1 < \alpha$.
Conclusion $\alpha = 0$.

Deuxième partie : Densité

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.

9. On a $0 = \inf A_+^*$, par la caractérisation de la borne inférieure avec $\varepsilon = y - x > 0$, il existe $a \in A_+^*$ tel que $0 \leq a < y - x$ mais $a \in A_+^*$, donc $0 < a < y - x$.

10. Il suffit de diviser dans l'inégalité par a.
Puisque $\frac{y}{a} - \frac{x}{a} > 1$, alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{x}{a} < n < \frac{y}{a}$, et en multipliant les membres de l'inégalité par a on obtient $x < na < y$.

11. Si $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, par les résultats des questions précédentes, il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in A$ tel que $x < na < y$, comme $na \in A$, alors il existe $z = na \in A$ tel que $x < z < y$.
Conclusion : A est une partie dense dans $\mathbb{R}$

END