بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Surveillé N° 4

v_n u_n

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

PCSI 1

Questions de Cours

1. Soit $f : E \to F$ une application A une partie de E et B une partie de F. Completer les égalités : $f(A) = \ldots\ldots\ldots$ et $f^{-1}(B) = \ldots\ldots$
2. Rappeler la défintion (epsilonisée) d'une suite convergente.
3. Rappeler la définition d'une suite bornée
4. Rappeler la définition de suites adjacentes.
5. Rappeler la caractérisation d'une suite convergente à l'aide des suites extraites.

Exercice 1

Soit $a > 0$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$

1. Étudier la monotonie de $(u_n)_n$.
2. En déduire la limite de $(u_n)_n$.
3. Démontrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n^2 \leq u_{n+1}$ et $u_{n+1} + 1 \leq (u_n + 1)^2$.
4. Démontrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n + 1 \leq (1 + u_0)^{2^n}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n^{\frac{1}{2^n}}$ et $w_n = (u_n + 1)^{\frac{1}{2^n}}$.
   - 4.1 Justifier ces définitions et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n > 0$ et $w_n > 0$.
   - 4.2 Démontrer que $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent.

PROBLÈME

Étude d'une suite

Dans tout le problème α est un réel strictement positif ($\alpha > 0$).
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le suite complexe définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{\alpha}$$

Première partie :
Questions préliminaires

Soit a un réel strictement positif.

1. On suppose dans cette question que $a > 1$.
   1.1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n \geq 1 + n(a-1)$.
   1.2 En déduire que $\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.
2. Montrer que si $0 < a < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} a^n = 0$.
3. Que vaut la limite de la suite $((a)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $a = 1$?

Deuxième partie :
Cas de $\alpha > 2$

Dans cette partie on suppose que $\alpha > 2$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1}| \leq \frac{2}{\alpha}|z_n|$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \leq (\frac{2}{\alpha})^n |z_0|$.
6. En déduire que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Deuxième partie :
Cas de $\alpha = 2$

Dans cette partie on suppose que $\alpha = 2$.

7. Montrer que la suite $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
8. En déduire que la suite $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
   Pour la suite on pose $z_0 = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$.
9. Montrer que si $\theta = 0$, alors la suite $(z_n)_n$ est convergente.
   On suppose pour toute la suite que $\theta \neq 0$.
10. Montrer que $z_1 = r\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{i\theta}{2}}$.
11. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\cos(\frac{\theta}{2^k}) > 0$.
12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = r\left(\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{\theta}{2^k})\right)e^{i\frac{\theta}{2^n}}$.
13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = r\dfrac{\sin\theta}{2^n\sin(\frac{\theta}{2^n})}e^{i\frac{\theta}{2^n}}$.
14. En déduire que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et que $\lim_{n \to +\infty} z_n = r\dfrac{\sin\theta}{\theta}$.
    Indication : On admet le résultat suivant : si $(u_n)_n$ est une suite convergente de limite nulle, alors la suite $\dfrac{\sin(u_n)}{u_n}$ est convergente de limite 1.

END