بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

# Devoir Surveillé $N^\circ$ 4

$v_n$ **Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.** $u_n$

PCSI 1

## Questions de Cours

Cours

**Exercice 1**

Soit $a > 0$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$

1. $(u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$ donc $(u_n)_n$ est une suite croissante.

2. Puisque $(u_n)_n$ est croissante, donc elle admet une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose par l'absurde que $ł \in \mathbb{R}$. Les deux suites $(u_{n+1})_n$ et $(u_n^2)_n$ tend vers respectivement $l$ et $l^2$. De l'égalité $u_{n+1} = u_n + u_n^2$, et en passant à la limite quand $n$ tend vers $+\infty$, il vient que $l = l + l^2$, ainsi $l = 0$. Mais la suite $(u_n)$ est croissante, donc $l \geq a > 0$. Ceci conduit à une contradiction. Il en résulte alors que $l = +\infty$.

3. On note que la suite $(u_n)_n$ est positive, car elle est croissante et $u_0 = a > 0$.
On a donc $u_{n+1} = u_n + u_n^2 \geq u_n^2$.
$u_{n+1} + 1 = u_n^2 + u_n + 1 \leq u_n^2 + 2u_n + 1 = (u_n + 1)^2$.

4. Par récurrence sur $n$ :
Pour $n = 0$, on a $u_n + 1 = u_0 + 1 \leq (1 + u_0) = (1 + u_0)^{2^0}$.
Supposons, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, que $u_n + 1 \leq (1 + u_0)^{2^2}$. D'après le résultat de la question précédente, on a $u_{n+1} + 1 \leq (u_n + 1)^2$. Par hypothèse de récurrence $u_n + 1 \leq (u_0 + 1)^{2^2}$, donc $(u_n + 1)^2 \leq \left((1 + u_0)^{2^n}\right)^2 = (1 + u_0)^{2^{n+1}}$. D'où $u_{n+1} + 1 \leq (1 + u_0)^{2^{n+1}}$.

   4.1 Les deux suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont bien définies, car les deux suites $(u_n)_n$ et $(u_n + 1)_n$ sont positives.
   Les deux suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont strictement positives, car les deux suites $(u_n)_n$ et $(u_n + 1)_n$ le sont.

   4.2 Convergence de $(w_n)_n$ : On a $u_{n+1}+1 \leq (u_n+1)^2$, donc $(u_{n+1}+1)^{\frac{1}{2^{n+1}}} \leq \left((u_n + 1)^2\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}}$, c'est-à-dire $w_{n+1} \leq w_n$. La suite $(w_n)_n$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente.
   Convergence de $(v_n)_n$ : On a $u_n^2 \leq u_{n+1}$ , donc $(u_n^2)^{\frac{1}{2^{n+1}}} \leq (u_{n+1})^{\frac{1}{2^{n+1}}}$, c'est-à-dire

$v_n \leq v_{n+1}$. Ainsi la suite $(v_n)_n$ est croissante. D'autre part on a $u_n^2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+1} + 1 \leq (u_0+1)^{2^{n+1}}$, donc $v_n = (u_n^2)^{\frac{1}{2^{n+1}}} \leq u_0 + 1$, c'est-à-dire la suite $(v_n)_n$ est majorée par $1 + u_0$. Maintenant la suite $(v_n)_n$ est croissante et majorée donc convergente.

# PROBLÈME

## Étude d'une suite

Dans tout le problème $\alpha$ est un réel strictement positif ($\alpha > 0$).
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le suite complexe définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{\alpha}$$

## Première partie : Questions préliminaires

Soit $a$ un réel strictement positif.

1. On suppose dans cette question que $a > 1$.
   - 1.1 Par récurrence sur $n$.
     L'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
     Supposons, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, que $a^n \geq 1 + n(a-1)$. En multipliant les membres de l'inégalité par $a$ ($\geq 0$), on obtient $a^{n+1} \geq a + n(a-1)a = 1 + a - 1 + n(a-1)a$, puisque $a > 1$, il vient que $a^{n+1} \geq 1 + a - 1 + n(a-1) = 1 + (n+1)(n+1)$.
   - 1.2 On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+n(a-1)) = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.
2. Si $0 < a < 1$, alors $\frac{1}{a} > 1$, d'après le résultat de la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{a}\right)^n = +\infty$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.
3. Lorsque $a = 1$, la suite est constante ($= 1$), donc sa limite est 1.

## Deuxième partie : Cas de $\alpha > 2$

Dans cette partie on suppose que $\alpha > 2$.

4. $|z_{n+1}| = |\dfrac{z_n + |z_n|}{\alpha}| \leq \dfrac{|z_n| + ||z_n||}{\alpha} = \dfrac{|z_n| + |z_n|}{\alpha} = \dfrac{2}{\alpha}|z_n|$.
5. Par récurrence sur $n$.
   Pour $n = 0$, la propriété est vérifiée, car $|z_0| \leq (\frac{2}{\alpha})^0|z_0|$.
   Supposons, pour un entier $n$, que $|z_n| \leq (\frac{2}{\alpha})^n|z_0|$.
   Puisque $|z_{n+1}| \leq \frac{2}{\alpha}|z_n|$, on a donc $|z_{n+1}| \leq \frac{2}{\alpha}|z_n| \leq \frac{2}{\alpha}(\frac{2}{\alpha})^n|z_0| = (\frac{2}{\alpha})^{n+1}|z_0|$.
   D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \leq (\frac{2}{\alpha})^n|z_0|$.
6. On a $0 \leq \frac{2}{\alpha} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{2}{\alpha})^n = 0$. On en déduit, par le théorème d'encadrement, que $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n| = 0$. Ainsi la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.

## Deuxième partie : Cas de $\alpha = 2$

Dans cette partie on suppose que $\alpha = 2$.

7. D'après le résultat de la question 4, on a $|z_{n+1}| \leq \frac{2}{\alpha}|z_n| = |z_n|$, donc la suite $(|z_n|)_n$ est décroissante.

8. La suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.
Pour la suite on pose $z_0 = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in ]-\pi, \pi[$.

9. Si $\theta = 0$, alors la suite $(z_n)_n$ est constante ($= r$). Montrons par récurrence sur $n$, que $z_n = r$.
Pour $n = 0$, $z_0 = re^{i0} = r$.
Supposons maintenant que $z_n = r$. On a donc $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2} = \dfrac{r+r}{2} = r$.
La suite étant constante, donc convergente de limite $r$.
On suppose pour toute la suite que $\theta \neq 0$.

10. $z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{2} = \dfrac{re^{i\theta} + r}{2} = r\dfrac{e^{i\theta}+1}{2} = r\dfrac{e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{-\frac{i\theta}{2}}}{2}e^{\frac{i\theta}{2}} = r\cos(\frac{\theta}{2})e^{\frac{i\theta}{2}}$.

11. Il suffit de montrer que $\frac{\theta}{2^k} \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
On a $|\theta| < \pi$, donc $|\frac{\theta}{2^k}| < \frac{\pi}{2^k} \leq \frac{\pi}{2}$ (car $k \geq 1$). Donc $|\frac{\theta}{2^k}| < \frac{\pi}{2}$. D'où le résultat.

12. Par récurrence sur $n \geq 1$. On note que le résultat est vérifié pour $n = 1$ (c'est le résultat de la question 10).
Supposons que $z_n = r\left(\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{\theta}{2^k})\right)e^{i\frac{\theta}{2^n}}$, pour un entier $n \geq 1$.
En tenant compte la positivité des cosinus (d'après la question précédente), on a $|z_n| = r\left(\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{\theta}{2^k})\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= \frac{z_n + |z_n|}{2} = \frac{r\left(\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{\theta}{2^k})\right) + r\left(\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{\theta}{2^k})\right)e^{i\frac{\theta}{2^n}}}{2} \\
&= r\left(\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{\theta}{2^k})\right)\frac{1+e^{i\frac{\theta}{2^n}}}{2} = r\left(\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{\theta}{2^k})\right)\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})e^{i\frac{\theta}{2^{n+1}}} \\
&= r\left(\prod_{k=1}^{n+1}\cos(\frac{\theta}{2^k})\right)e^{i\frac{\theta}{2^{n+1}}}
\end{aligned}$$

13. Il s'agit de démontrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{\theta}{2^k}) = \frac{\sin\theta}{2^n\sin(\frac{\theta}{2^n})}$. Procédons par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{1}\cos(\frac{\theta}{2^k}) = \cos(\frac{\theta}{2}) = \frac{2\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})}{2\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{\sin(\theta)}{2\sin(\frac{\theta}{2})}$.
On suppose que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{\theta}{2^k}) = \frac{\sin\theta}{2^n\sin(\frac{\theta}{2^n})}$.
Donc

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}\cos(\frac{\theta}{2^k}) &= \left(\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{\theta}{2^k})\right)\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}}) = \frac{\sin\theta}{2^n\sin(\frac{\theta}{2^n})}\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}}) \\
&= \frac{\sin\theta}{2^n 2\sin(\frac{\theta}{2^{n+1}})\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})}\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}}) = \frac{\sin\theta}{2^{n+1}\sin(\frac{\theta}{2^{n+1}})}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

14. On a $z_n = r\dfrac{\sin(\theta)}{2^n\sin(\frac{\theta}{2^n})} = r\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}\dfrac{v_n}{\sin(v_n)}$, où $v_n = \dfrac{\theta}{2^n}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, il vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{\sin(v_n)} = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = r\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}$.

**END**