بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Surveillé $N°$ 5

v_n **Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.** u_n

PCSI 1

Questions de Cours

1. Rappeler le théorème des valeurs intermédiaires .
2. Rappeler le théorème de Rolle.
3. Rappeler le théorème des accroissements finis.
4. Rappeler la formule de Leibniz.
5. Rappeler la définition d'une fonction convexe sur un intervalle I.

Exercice 1

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 2

On pose $\theta = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$

1. Montrer que $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que $\tan(\theta) = 1$.
3. En déduire la valeur de $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$.

Exercice 3

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, telle que pour tout $x, y \in [a,b]$ avec $x \neq y$,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

1. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $f'(x) \le \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

2. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$.

PROBLÈME

Autour des l'inégalités des accroissements finis

Dans tout le problème, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Première partie : Une inégalité des accroissements finis

Dans cette partie, $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telles que pour tout $x \in I$,

$$|f'(x)| \leq g'(x)$$

1. Vérifier que la fonction $g - f$ est croissante sur I.
2. Montrer que pour tout $x, y \in I$ avec $x \leq y$, $f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x)$.
3. Montrer que la fonction $g + f$ est croissante sur I.
4. En déduire que pour tout $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|$.

Deuxième partie : Une application

Dans cette partie, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) + f'(x)| \leq 1$$

5. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|(e^x f(x))'| \leq e^x$.
6. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f(x) - f(0)e^{-x}| \leq 1 - e^{-x}$.

Troisième partie : Le lemme de Gronwall

Dans cette partie $I = [a,b]$.
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, telles que :

$$\forall x \in [a,b], \quad f'(x) \leq f(x)g'(x)$$

On note h la fonction définie sur I, par $h(x) = f(x)e^{-g(x)}$.

7. Vérifier que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
8. Montrer que h est décroissante sur I.
9. En déduire que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)e^{g(x)-g(a)}$.

END