بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Surveillé $N°$ 5

v_n **Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.** u_n

PCSI 1

Questions de Cours

Cours

Exercice 1
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par ,

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$$

La fonction f (somme et composée de fonction dérivables) est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0$, ainsi f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = f(1) = \dfrac{\pi}{2}$, ou encore

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 2
On pose $\theta = \arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{5} + \arctan\dfrac{1}{8}$

1. On a $0 \le \frac{1}{2} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$, $0 \le \frac{1}{5} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $0 \le \frac{1}{8} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$, donc $0 \le \arctan\dfrac{1}{2} \le \arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$, $0 \le \arctan\dfrac{1}{5} \le \arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$ et $0 \le \arctan\dfrac{1}{8} \le \arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$ (notons que la fonction arctan est croissante), par suite $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$.

2. On a,

$$\tan(\theta) = \frac{\tan\left(\arctan(\frac{1}{2})\right) + \tan\left(\arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{8})\right)}{1 - \tan\left(\arctan(\frac{1}{2})\right)\tan\left(\arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{8})\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \tan\left(\arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{8})\right)}{1 - \frac{1}{2}\tan\left(\arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{8})\right)}$$

et d'autre part, $\tan(\arctan(\frac{1}{5})+\arctan(\frac{1}{8})) = \dfrac{\tan(\arctan(\frac{1}{5}))+\tan(\arctan(\frac{1}{8}))}{1-\tan(\arctan(\frac{1}{5}))\tan(\arctan(\frac{1}{8}))} = \dfrac{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}} = \dfrac{1}{3}$, d'où $\tan(\theta) = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$.

3. On note que $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ car $\tan(\theta) = 1$, donc $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, ainsi, $\theta = \arctan(\tan(\theta)) = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$, il vient alors que

$$\boxed{\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 3

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, telle que pour tout $x, y \in [a,b]$ avec $x \neq y$,

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

1. Notons que le terme majorant dans l'inégalité (de l'hypothèse) est indépendant de la variable y, et que le terme minorant tend vers $f'(x)$ quand y tend vers x, en d'autre terme $f'(x) = \lim\limits_{y\to x} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. D'où le résultat.

2. On considère la fonction g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$. Il s'agit de montrer que g est nulle sur $[a,b]$. La fonction g est dérivable sur $[a,b]$ (somme de deux fonctions dérivables), et $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 0$. La fonction g est donc décroissante sur $[a,b]$. Il vient alors que pour tout $x \in [a,b]$, $0 = g(b) \leq g(x) \leq g(a) = 0$, ce qui entraîne que g est nulle sur $[a,b]$.

PROBLÈME

Autour des l'inégalités des accroissements finis

Dans tout le problème, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Première partie : Une inégalité des accroissements finis

Dans cette partie, $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telles que pour tout $x \in I$,

$$|f'(x)| \leq g'(x)$$

1. Par hypothèse $-g' \leq f' \leq g'$, donc $g' - f' \geq 0$, c'est-à-dire $(g-f)' \geq 0$. Donc la fonction $g - f$ est croissante sur I.

2. Soient $x, y \in I$ avec $x \leq y$. La fonction $g - f$ étant croissante sur I, alors $g(x) - f(x) \leq g(y) - f(y)$, il vient alors que $f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x)$.

3. On a $-g' \leq f' \leq g'$, donc $g' + f' \geq 0$, ce qui entraîne que $g + f$ est croissante sur I.

4. Soient $x, y \in I$, on va distinguer les deux cas $x \leq y$ et $y \leq x$.
Le cas $x \leq y$: La fonction $g + f$ est croissante sur I, donc $g(x) + f(x) \leq g(y) + f(y)$, par suite $g(x) - g(y) \leq f(y) - f(x)$, en tenant compte le résultat de la question 2, on obtient

$$-(g(y) - g(x)) \leq f(y) - f(x) \leq (g(y) - g(x))$$

Ces inégalités s'écrivent

$$|f(y) - f(x)| \leq (g(y) - g(x)) = |g(y) - g(x)|$$

Notons que la fonction g est croissante (car $0 \leq |f'| \leq g'$), et donc $g(y) - g(x) = |g(y) - g(x)|$.
Le cas $y \leq x$: Dans ce cas (en changeant les rôles de x et y dans le cas précédent), on obtient $|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|$, d'où $|f(y) - f(x)| \leq |g(y) - g(x)|$.

Deuxième partie :
Une application

Dans cette partie, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) + f'(x)| \leq 1$$

5. Par un calcul simple, $|(e^x f(x))'| = |e^x f(x) + e^x f'(x)| = e^x |f(x) + f'(x)| \leq e^x$.
6. D'après le résultat de la question précédente, on a $|(e^x f(x))'| \leq (e^x)'$. Par application du résultat de la première partie, on obtient $|e^x f(x) - e^0 f(0)| \leq |e^x - e^0|$, c'est-à-dire $|e^x f(x) - f(0)| \leq |e^x - 1|$, en multipliant les membres de cette inégalité par $e^{-x} > 0$, on obtient $|f(x) - f(0)e^{-x}| \leq |1 - e^{-x}|$. Comme $x \in \mathbb{R}_+$, $1 - e^{-x} \geq 0$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ |f(x) - f(0)e^{-x}| \leq 1 - e^{-x}$

Troisième partie :
Le lemme de Gronwall

Dans cette partie $I = [a, b]$.
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, telles que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f'(x) \leq f(x)g'(x)$$

On note h la fonction définie sur I, par $h(x) = f(x)e^{-g(x)}$.

7. Les deux fonction f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et la fonction exp est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc h, comme produit et composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, est de classe $\mathscr{C}^1$.
8. La fonction h est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a $h'(x) = f'(x)e^{-g(x)} - f(x)g'(x)e^{-g(x)} = (f'(x) - f(x)g'(x))e^{-g(x)} \leq 0$. La fonction h est donc décroissante sur I.
9. Soit $x \in I = [a, b]$, on a donc $a \leq x$. Puisque h est décroissante sur I, $h(x) \leq h(a)$, c'est-à-dire $f(x)e^{-g(x)} \leq f(a)e^{-g(a)}$, ou encore

$$\boxed{f(x) \leq f(a)e^{g(x)-g(a)}}$$

END