بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Surveillé $N°$ 6

$\int$ y'

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

PCSI 1

Questions de Cours

1. Rappeler la formule d'intégration par parties.
2. Rappeler la forme des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + a(t)y = 0$.
3. Rappeler le $\mathrm{DL}_n(0)$ de la fonction exponentielle.
4. Rappeler le $\mathrm{DL}_9(0)$ de la fonction ch .
5. Rappeler le $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $x \mapsto (x+1)^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 1

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t)+\cos(t)}dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}dt$

1. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $I = J$.
2. Calculer $I + J$.
3. Déterminer les valeurs de I et J.
4. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+\sqrt{1-t^2}}dt$.

Exercice 2

1. Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(2t)e^{\cos(t)}$.
2. Résoudre l'équation différentielle suivante : $(E) \quad y' - \sin(t)y = \sin(2t)$.

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle suivante : $(E) \quad y'' - 2y' + y = e^t$.

PROBLÈME

Formule de Taylor-Lagrange

Dans tout le problème, a, b désigne deux reels tels que $a < b$.

Première partie :
Formule de la moyenne

Dans cette partie, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues sur $[a, b]$, avec g **positive sur** $[a, b]$.

1. Montrer que si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt = 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$.

   On suppose dans la suite de cette partie que $\displaystyle\int_a^b g(t)dt \neq 0$.

2. Justifier l'existence de $\alpha, \beta \in [a, b]$ tels que pour tout $t \in [a, b]$, $f(\alpha) \leq f(t) \leq f(\beta)$.

3. Montrer que $f(\alpha)\displaystyle\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq f(\beta)\int_a^b g(t)dt$.

4. En déduire l'existence de $c \in [a, b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$.

5. En déduire qu'existe $c \in [a, b]$ tel que $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c)$.

Deuxième partie :
Formule de Taylor

Dans cette partie, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a, b]$.

6. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)dt$.

7. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \displaystyle\int_a^x (x-t)f''(t)dt$.

8. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$$

9. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $c_x \in [a, x]$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c_x)$$

10. En déduire que

$$f(x) =_a \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

END