بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Surveillé $N°$ 7

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

PCSI 1

Questions de Cours

1. Rappeler le théorème de la division euclidienne..
2. Rappeler la définition d'un polynôme scindé .
3. Rappeler la définition d'un polynôme irréductible.
4. Rappeler la définition d'une racine de multiplicité m (d'un polynôme P).
5. Rappeler la formule de Taylor (pour les polynômes).

Exercice 1

Déterminer le développement limité de $x \mapsto (1+\sin(x))\,\mathrm{ch}(x)$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 2

Déterminer le développement limité de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\sin(x)}$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 3

Soit $P = X^5 - 1$.

1. Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Donner la forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de la fraction rationnelle $\frac{1}{P}$.

Exercice 4

Soit $F = \dfrac{X}{(X-2)(X-1)^2} \in \mathbb{R}(X)$.

1. Déterminer les pôles et les zéros de F.

2. Donner la forme de la décomposition en éléments simples de la fraction F.
3. Déterminer la décomposition en éléments simples de F.

PROBLÈME

Étude d'une fonction et suite

Dans tout le problème, f désigne la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = x + \tan(x)$.

Première partie : Étude de la fonction f

1. Étudier la parité de f.
2. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
3. Étudier les variations de f, en précisant les limites en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.
4. Déterminer $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$.
5. Montrer que f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$.
   Dans toute la suite du problème g désigne la fonction f^{-1}.
6. Déterminer le développement limité de g à l'ordre 2 en 0. (Ind : $(g \circ f)(x) = x$)

Deuxième partie : Étude asymptotique d'une suite

On rappelle que g désigne la fonction f^{-1} définie dans la première partie du problème.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = g(n)$.

7. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + \tan(u_n) = n$.
8. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \arctan(n - u_n)$.
9. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
10. En déduire que $u_n = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n-u_n}\right)$
11. Montrer que $\arctan\left(\frac{1}{n-u_n}\right) = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$.
12. En déduire que $u_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$.
13.
    13.1 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction arctan.
    13.2 En déduire que $u_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2n^2} - \frac{3\pi^2-16}{12n^3} + o(\frac{1}{n^3})$

END