Devoir Surveillé $N°$ 1

$\emptyset$

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

$\mathscr{P}(\emptyset) \neq \emptyset$

PCSI

Questions de cours

Soit $f : E \to F$ une application, A une partie de E et B une partie de F. Rappeler la définition de :

1. $f(A)$,
2. $f^{-1}(B)$,
3. f injective,
4. f surjective,
5. $f|_A$ (la réstriction de f à A).

Exercice 1

Écrire à l'aide des quatificateurs les assertions suivantes :

1. Tout entier naturel est impair.
2. f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit $\mathscr{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathscr{R}y \Leftrightarrow \sin(\pi x) = \sin(\pi y)$$

.

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $\overline{0}$ (la classe d'équivalence de 0).

Exercice 3

Montrer que $\dfrac{\ln 7}{\ln 8} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 4

Soit $f : E \to E$ une application vérifiant $f \circ f = f$.

1. Montrer que pour tout $y \in f(E)$, $f(y) = y$.
2. Montrer que si f est surjective, alors $f = \mathrm{Id}_E$.
3. Montrer que si f est injective, alors $f = \mathrm{Id}_E$.

PROBLÈME

Notations : Si $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$, on note $\sum_{k=1}^{n} x_k$ la somme $x_1+x_2+\dots+x_n$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1+x_2+\dots+x_n$. On note aussi $\prod_{k=1}^{n} x_k$ le produit $x_1x_2\dots x_n$, c'est-à-dire $\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1x_2\dots x_n$.
Le but du problème est de démontrer par récurrence sur $n \geq 2$ que :

$$\forall x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_+^*,\ \prod_{k=1}^{n} x_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k \geq n$$

Première partie : La propriété pour $n=2$

$\boxed{1.}$ Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a+\frac{1}{a} \geq 2$.

$\boxed{2.}$ En déduire que si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_1x_2=1$, alors $x_1+x_2 \geq 2$.

Deuxième partie : Hérédité

Soit $n \geq 2$, et supposons que la propriété est vraie pour l'entier n, c'est-à-dire si $y_1,\dots,y_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\prod_{k=1}^{n} y_k = 1$, alors $\sum_{k=1}^{n} y_k \geq n$. En d'autres termes si le produit de n nombres réels strictement positifs est égale à 1 alors leurs somme est supérieure ou égale à n.

Soit maintenant, $x_1,\dots,x_n,x_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\prod_{k=1}^{n+1} x_k = 1$. On veut démontrer que $\sum_{k=1}^{n+1} x_k \geq n+1$.

$\boxed{3.}$ Montrer que si $1 \leq \forall k \leq n+1$, $x_k \geq 1$, alors $\sum_{k=1}^{n+1} x_k \geq n+1$.

$\boxed{4.}$ On suppose qu'il existe $l \in \{1,\dots,n+1\}$ tel que $x_l < 1$.

$\boxed{4.1}$ Montrer qu'il existe $l' \in \{1,\dots,n+1\}$ tel que $x_{l'} > 1$. Indication : raisonner par l'absudre.
Dans la suite de cette partie, pour simplifier les notations, on suppose que $l=n$ et $l'=n+1$.
On a donc $x_n < 1$ et $x_{n+1} > 1$.

$\boxed{4.2}$ Montrer que $x_1+\dots+x_{n-1}+x_nx_{n+1} \geq n$. Indication : utiliser l'hypothèse de récurrence.

$\boxed{4.3}$ Montrer que $x_n+x_{n+1} \geq x_nx_{n+1}+1$.

$\boxed{4.4}$ En déduire que $\sum_{k=1}^{n+1} x_k \geq n+1$.

Troisième partie : Applications

$\boxed{5.}$ Soit $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\dots+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}+\dfrac{a_n}{a_1} \geq n$.

$\boxed{6.}$ Inégalité arithmético-géométrique :
Soit $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\alpha = (a_1\dots a_n)^{\frac{1}{n}}$. Pour $1 \leq k \leq n$, on pose $x_k = \dfrac{a_k}{\alpha}$.

$\boxed{6.1}$ Vérifier que $\prod_{k=1}^{n} x_k = 1$.

$\boxed{6.2}$ En déduire que

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$