Devoir Surveillé $N°$ 1

E

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

$\mathscr{P}(E)$

PCSI

Questions de cours

1. Rappeler la définition d'une application injective.
2. Rappeler la définition d'une application surjective.
   Soit $f : E \to F$ une application, A une partie de E et B une partie de F.
3. Rappeler la définition de $f(A)$, completer $y \in f(A) \Leftrightarrow ....$
4. Rappeler la définition de $f^{-1}(B)$, completer $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow ....$

Exercice 1 Soit P l'assertion : Tout nombre réel est majoré par un réel positif.

1. Écrire à l'aide des quantificateurs l'assertion P.
2. Donner la négation de l'assertion P.
3. L'assertion P est-elle vraie ? Justifier.

Exercice 2 Montrer que $\dfrac{\ln 6}{\ln 5} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3 Soit x un réel strictement supérieur à -1, $(x > -1)$. Soit $P(n)$ l'assertion :

$$P(n) : \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$$

1. Justifier que $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
2. Démontrer $P(2)$.
3. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $P(n)$ est vraie. (Indication : $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$.....)

PROBLÈME

Dans tout le problème $f : E \to F$ désigne une application de E vers F.

Une question préliminaire

Soit B, B' deux parties de F telles que $B \cap B' = \emptyset$ et $B \cup B' = F$. Montrer que $B' = \overline{B}$.

Première partie :
Propriétés

1. Soit $A, A' \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que si $A \subseteq A'$ alors $f(A) \subseteq f(A')$.
2. Soit $A, A' \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$. Montrer que si de plus f est injective alors $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.
3. Soit $A, A' \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
4. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
5. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
6. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Montrer que $f^{-1}\left(\overline{B}\right) = \overline{f^{-1}(B)}$.

Deuxième partie : Étude d'une application

Soit $\varphi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F)$ l'application définie, pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, par $\varphi(X) = f\left(\overline{X}\right)$.

7. Déterminer $\varphi(E)$.
8. Soit $X, X \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $\varphi(X \cup X') \subseteq \varphi(X) \cap \varphi(X')$.
9. Soit $X, X \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que si f est injective alors $\varphi(X \cup X') = \varphi(X) \cap \varphi(X')$. Indication : utiliser le résultat de la question 2.
10. Soit $X, X' \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $\varphi(X \cap X') = \varphi(X) \cup \varphi(X')$.
    On suppose, pour la suite de cette partie, que f **est bijective**.
11. Montrer que $\varphi(\emptyset) = F$.
12. Soit $X \in \mathscr{P}(E)$.
    - 12.1 Montrer que $\varphi(X) \cup \varphi\left(\overline{X}\right) = F$.
    - 12.2 Montrer que $\varphi(X) \cap \varphi\left(\overline{X}\right) = \emptyset$.
    - 12.3 En déduire que $\varphi(X) = \overline{f(X)}$. Indication : utiliser la question préliminaire.