Devoir Surveillé $N°$ 1

E $\mathscr{P}(E)$

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

PCSI

Corrigé

Questions de cours

Cours

Exercice 1 Soit P l'assertion : Tout nombre réel est majoré par un réel positif.

1. $P: \forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}_+ \ \text{tel que} \ \ x \leq y.$
2. Négation de l'assertion P : $\exists x \in \mathbb{R},\ \ \forall y \in \mathbb{R}_+,\ y < x.$
3. L'assertion P est vraie. En effet, Soit $x \in \mathbb{R}$, pour $y = |x|$, on a $y \in \mathbb{R}_+$ et $x \leq |x| = y$.

Exercice 2 Par l'absurde, supposons que $\dfrac{\ln 6}{\ln 5} \in \mathbb{Q}$.
Remarquons d'abord que $\dfrac{\ln 6}{\ln 5} > 0$. Ils existent alors $p, q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{\ln 6}{\ln 5} = \dfrac{p}{q}$, ou encore $p\ln(5) = q\ln(6)$, par suite $\ln(5^p) = \ln(6^q)$, donc $5^p = 6^q$, ce qui impossible car 5^p est impair et 6^q est impair.

Exercice 3 Soit x un réel strictement supérieur à -1, $(x > -1)$. Soit $P(n)$ l'assertion :

$$P(n): \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$$

1. Pour $n = 0$: On a $(1+x)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0.x$, donc $P(0)$ vraie.
   Pour $n = 1$: On a $(1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + x = 1 + 1.x$, donc $P(1)$ est vraie.
2. Pour $n = 2$: On a $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x$, d'où $P(2)$.
3. La propriété est vraie pour $n = 0$ (question 1.).
   Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
   Puisque $1 + x > 0$, on obtient

   $$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

   Donc
   $$(1+x)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

   Car $nx^2 \geq 0$. On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

PROBLÈME

Dans tout le problème $f : E \to F$ désigne une application de E vers F.

Une question préliminaire

Soit B, B' deux parties de F telles que $B \cap B' = \emptyset$ et $B \cup B' = F$.
On a

$$\begin{aligned} B' &= B' \cap F = B' \cap (B \cup \overline{B}) = (B' \cap B) \cup (B' \cap \overline{B}) \\ &= \emptyset \cup (B' \cap \overline{B}) \quad (\text{ car } B \cap B' = \emptyset) \\ &= B' \cap \overline{B} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \overline{B} &= \overline{B} \cap F = \overline{B} \cap (B \cup B') = (\overline{B} \cap B) \cup (\overline{B} \cap B') \quad (\text{ car } B \cup B' = F) \\ &= \emptyset \cup (\overline{B} \cap B') \\ &= \overline{B} \cap B' \end{aligned}$$

Première partie : Propriétés

Par conséquent $B' = \overline{B}$.

$\boxed{1.}$ Cours : Soit $y \in f(A)$, il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$, puisque $A \subseteq A'$, on a donc $a \in A'$, et par suite $y = f(a) \in f(A')$.

$\boxed{2.}$ On a $A \cap A' \subseteq A$ et $A \cap A' \subseteq A'$, d'après le résultat de la question précédente, on a $f(A \cap A') \subseteq f(A)$ et $f(A \cap A') \subseteq f(A')$, par suite $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$.
On suppose de plus que f est injective. Il suffit alors de montrer que $f(A) \cap f(A') \subseteq f(A \cap A')$. Soit $y \in f(A) \cap f(A')$, c'est-à-dire $y \in f(A)$ et $y \in f(A')$. Il existe $a \in A$ et $a' \in A'$ tels que $y = f(a)$ et $y = f(a')$. En particulier $f(a) = f(a')$, il résulte de l'injectivité de f que $a = a'$, donc $a = a' \in A \cap A'$, d'où $y = f(a) \in f(A \cap A')$. Pour l'autre inclusion ; soit $y \in f(A \cup A')$, il existe alors $x \in A \cup A'$ tel que $y = f(x)$. L'élément $x \in A \cup A'$, donc $x \in A$ ou $x \in A'$, par suite $y = f(x) \in f(A)$ ou $y = f(x) \in f(A')$, c'est-à-dire $y \in f(A) \cup f(A')$.

$\boxed{3.}$ Cours : D'abord $A \subseteq A \cup A'$ et $A' \subseteq A \cup A'$, donc $f(A) \subseteq f(A \cup A')$ et $f(A') \subseteq f(A \cup A')$, par suite $f(A) \cup f(A') \subseteq f(A) \cup f(A')$.
D'où le résultat.

$\boxed{4.}$ Pour simplifier, posons $D = f(A)$. Soit $a \in A$, donc $f(a) \in f(A) = D$, par suite $a \in f^{-1}(D) = f^{-1}(f(A))$.

$\boxed{5.}$ Soit $y \in f(f^{-1}(B))$, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Mais $x \in f^{-1}(B)$ signifie que $f(x) \in B$, et donc $y = f(x) \in B$. d'où le résultat.

$\boxed{6.}$ Soit $x \in E$.
$x \in f^{-1}\left(\overline{B}\right) \Leftrightarrow f(x) \in \overline{B} \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in \overline{f^{-1}(B)}$. D'où l'égalité.

Deuxième partie : Étude d'une application

Soit $\varphi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F)$ l'application définie, pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, par $\varphi(X) = f\left(\overline{X}\right)$.

$\boxed{7.}$ $\varphi(E) = f\left(\overline{E}\right) = f(\emptyset) = \emptyset$.

$\boxed{8.}$ $\varphi(X \cup X') = f\left(\overline{X \cup X'}\right) = f\left(\overline{X} \cap \overline{X'}\right) \subseteq f\left(\overline{X}\right) \cap f\left(\overline{X'}\right)$ (d'après le résultat de la question 2.). Donc $\varphi(X \cup X') \subseteq \varphi(X) \cap \varphi(X')$.

9. Avec les calculs de la question précédente, on a $\varphi(X \cup X') = f\left(\overline{X} \cap \overline{X'}\right)$, puisque f est injective, le résultat de question 2. assure que $f\left(\overline{X} \cap \overline{X'}\right) = f\left(\overline{X}\right) \cap f\left(\overline{X'}\right)$, donc $\varphi(X \cup X') = \varphi(X) \cap \varphi(X')$.

10. Tenant compte le résultat de la question 3, on obtient,
$\varphi(X \cap X') = f\left(\overline{X \cap X'}\right) = f(\overline{X} \cup \overline{X'}) = f\left(\overline{X}\right) \cup f\left(\overline{X'}\right) = \varphi(X) \cup \varphi(X')$.
.
On suppose, pour la suite de cette partie, que f **est bijective**.

11. $\varphi(\emptyset) = f\left(\overline{\emptyset}\right) = f(E) = F$. ($f(E) = F$ car f est surjective).

12. Soit $X \in \mathscr{P}(E)$.

12.1 D'après le résultat de la question 10, on a $\varphi(X) \cup \varphi\left(\overline{X}\right) = \varphi\left(X \cap \overline{X}\right) = \varphi(\emptyset) = F$ (la dernière égalité d'après la question 11).

12.2 Puisque f est injective, d'après le résultat de la question 9, on a $\varphi(X) \cap \varphi\left(\overline{X}\right) = \varphi\left(X \cup \overline{X}\right) = \varphi(E) = \emptyset$ (dernière égalité d'après le résultat de la question 7).

12.3 D'après les résultats des questions précédentes, on a

$$\varphi(X) \cap \varphi\left(\overline{X}\right) = \emptyset \quad \text{et} \quad \varphi(X) \cup \varphi\left(\overline{X}\right) = F$$

On obtient, en appliquant le résultat de la question préliminaire, que

$$\varphi(X) = \overline{\varphi\left(\overline{X}\right)} = \overline{f\left(\overline{\overline{X}}\right)} = \overline{f(X)}$$