Corrigé

Devoir Surveillé $N°$ 1

$\emptyset$

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

$\mathscr{P}(\emptyset) \neq \emptyset$

PCSI

Questions de cours

Cours

Exercice 1

Écrire à l'aide des quatificateurs les assertions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, n est impair, ou $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.

Exercice 2

Soit $\mathscr{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathscr{R}y \Leftrightarrow \sin(\pi x) = \sin(\pi y)$$

.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin(\pi x) = \sin(\pi x)$, donc $x\mathscr{R}x$.
   Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathscr{R}y$ c'est-à-dire $\sin(\pi x) = \sin(\pi y)$, donc $\sin(\pi y) = \sin(\pi x)$, d'où $y\mathscr{R}x$.
   Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$, c'est-à-dire $\sin(\pi x) = \sin(\pi y)$ et $\sin(\pi y) = \sin(\pi z)$, on a donc $\sin(\pi x) = \sin(\pi z)$, ainsi $x\mathscr{R}z$.
   On en déduit que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. $\overline{0} = \{x \in \mathbb{R} / \sin(\pi x) = \sin(\pi 0) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} / \exists k \in \mathbb{Z}, \pi x = \pi k\} = \{x \in \mathbb{R} / \exists k \in \mathbb{Z}, x = k\} = \mathbb{Z}$.

Exercice 3

Par l'absurde supposons que $\dfrac{\ln 7}{\ln 8} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{\ln 7}{\ln 8} = \dfrac{p}{q}$, ou encore $q \ln 7 = p \ln 8$. On a donc $7^q = 8^p$ ce qui est impossible car 7^q est impair et 8^p est pair (Notons aussi que p et q sont non nuls).

On en déduit alors que $\dfrac{\ln 7}{\ln 8} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 4

Soit $f : E \to E$ une application vérifiant $f \circ f = f$.

1. Soit $y \in f(E)$, il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a donc $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$.

[2.] Supposons que f est surjective. Soit $x \in E$, par la surjectivité, il existe $x' \in E$ tel que $x = f(x')$. Donc $f(x) = f(f(x')) = f(x') = x$, par suite $f = \mathrm{Id}_E$.

[3.] On suppose que f est injective. Soit $x \in E$. On a $f(f(x)) = f(x)$, on en déduit par injectivité que $f(x) = x$. D'où $f = \mathrm{Id}_E$.

PROBLÈME

Notations : Si $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, on note $\sum_{k=1}^{n} x_k$ la somme $x_1 + x_2 + \dots + x_n$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. On note aussi $\prod_{k=1}^{n} x_k$ le produit $x_1 x_2 \dots x_n$, c'est-à-dire $\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 x_2 \dots x_n$.
Le but du problème est de démontrer par récurrence sur $n \geq 2$ que :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*, \quad \prod_{k=1}^{n} x_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k \geq n$$

Première partie :
La propriété pour $n = 2$

[1.] Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. on a $a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{1}{a}\left(a^2 + 1 - 2a\right) = \frac{1}{a}(a-1)^2 \geq 0$. D'où le résultat.

[2.] Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_1 x_2 = 1$. On a donc $x_2 = \frac{1}{x_1}$. Il vient alors que $x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} \geq 2$ par le résultat de la question précédente.

Deuxième partie :
Hérédité

Soit $n \geq 2$, et supposons que la propriété est vraie pour l'entier n, c'est-à-dire si $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\prod_{k=1}^{n} y_k = 1$, alors $\sum_{k=1}^{n} y_k \geq n$. En d'autres termes si le produit de n nombres réels strictement positifs est égale à 1 alors leurs somme est supérieure ou égale à n.
Soit maintenant, $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\prod_{k=1}^{n+1} x_k = 1$. On veut démontrer que $\sum_{k=1}^{n+1} x_k \geq n+1$.

[3.] Si $1 \leq \forall k \leq n+1$, $x_k \geq 1$, alors $\sum_{k=1}^{n+1} x_k \geq \sum_{k=1}^{n+1} 1 = n+1$.

[4.] On suppose qu'il existe $l \in \{1, \dots, n+1\}$ tel que $x_l < 1$.

[4.1] Supposons par l'absurde que $\forall l' \in \{1, \dots, n+1\}$, $x_{l'} \leq 1$ (mais n'oubliez pas que $x_l < 1$).Dans ce cas

$$\prod_{k=1}^{n+1} x_k = \left(\prod_{k=1, k \neq l}^{n+1} x_k\right) x_l \leq x_l < 1$$

Ce qui n'est pas possible, car le produit est égale à 1 (par hypothèse).
Dans la suite de cette partie, pour simplifier les notations, on suppose que $l = n$ et $l' = n+1$. On a donc $x_n < 1$ et $x_{n+1} > 1$.

[4.2] Il suffit de regrouper le deux derniers termes dans le produit pour avoir un produit de n réels, en d'autres termes, on a

$$x_1 \dots x_{n-1}(x_n x_{n+1}) = 1$$

Produit de n réels strictement positifs qui est égale à 1, d'après l'hypothèse de récurrence leurs somme est supérieure ou égale à n, c'est-à-dire $x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} \geq n$.

$\boxed{4.3}$ On a $x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} - 1 = x_{n+1}(1-x_n) - (1-x_n) = (x_{n+1}-1)(1-x_n) \geq 0$ car $x_{n+1}-1>0$ et $1-x_n>0$. Il vient alors que $x_n + x_{n+1} \geq x_n x_{n+1} + 1$.

$\boxed{4.4}$

$$\begin{aligned} x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} &= x_1 + \ldots + x_{n-1} + (x_n + x_{n+1}) \\ &\geq x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} + 1 \\ &\geq n+1 \end{aligned}$$

D'où $\sum_{k=1}^{n+1} x_k \geq n+1$.

Troisième partie :
Applications

$\boxed{5.}$ Le produit des nombres $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_n}{a_1}$ est égale à 1 donc leurs somme et supérieure ou égale à n.

$\boxed{6.}$ Inégalité arithmético-géométrique :
Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\alpha = (a_1 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$. Pour $1 \leq k \leq n$, on pose $x_k = \frac{a_k}{\alpha}$.

$\boxed{6.1}$ Remarquons d'abord que $\alpha^n = a_1 \ldots a_n$. On a donc
$\prod_{k=1}^{n} x_k = \frac{a_1}{\alpha} \ldots \frac{a_n}{\alpha} = \frac{a_1 \ldots a_n}{\alpha^n} = \frac{a_1 \ldots a_n}{a_1 \ldots a_n} = 1$.

$\boxed{6.2}$ Comme le produit $x_1 \ldots x_n = 1$, on a donc $x_1 + \ldots + x_n \geq n$ c'est-à-dire $\frac{a_1 \ldots + a_n}{\alpha} \geq n$, par suite $\frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) \geq \alpha = (a_1 + \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$ ou encore

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$