Devoir Surveillé $N°$ 2

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

PCSI

Questions de cours

1. Donner la définition de $\mathbb{U}$.
2. Donner la définition de $\mathbb{U}_n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Rappeler la formule du binôme de Newton.

Soit $f : E \to F$ une application, rappeler les définitions suivantes :

4. f surjective.
5. $f(A)$ où A est une partie de E.
6. $f^{-1}(B)$ où B est une partie de F.

Exercice 1
Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+2y+z & = & 3 \\ 2x+2y+3z & = & 4 \end{cases}$$

Exercice 2
Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+3y+2z+t & = & 1 \\ x+4y+z+t & = & 2 \\ x+5y+4z+t & = & 4 \end{cases}$$

Exercice 3
Linéariser $\cos^3(x)$.

Exercice 4
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^7 = z^2$.

PROBLÈME

Définition : Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application. On dit que f est une **isométrie** de $\mathbb{C}$ si :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \ \ |f(z) - f(z')| = |z - z'|$$

Le but du problème est l'étude des isométries de $\mathbb{C}$.

Première partie : Exemples et propriétés

1. Soit $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$.

   1.1 Montrer que l'application $f_1 : z \mapsto f_1(z) = az + b$ est une isométrie de $\mathbb{C}$.

   1.2 Montrer que l'application $f_2 : z \mapsto f_2(z) = a\overline{z} + b$ est une isométrie de $\mathbb{C}$.

2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une isométrie.

   2.1 Montrer que f est injective.

   2.2 Montrer que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $f(z) - f(0) \in \mathbb{U}$.

   2.3 En déduire que, si $f(0) = 0$, alors $f(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{U}$.

3. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une isométrie de $\mathbb{C}$ telle que $f(0) = 0$.

   3.1 Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| = |z|$.

   3.2 Montrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\left(f(z)\overline{f(z')}\right) = \mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)$.

   Indication : $|f(z) - f(z')|^2 = \left(f(z) - f(z')\right)\left(\overline{f(z) - f(z')}\right) = \ldots$

Deuxième partie : Résultats utiles

4. Soit $\omega \in \mathbb{U}$ tel que $|\omega - 1| = \sqrt{2}$. Montrer que $\omega = i$ ou $\omega = -i$.

5. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$.

Troisième partie : Détermination des isométries de $\mathbb{C}$

Dans cette partie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ désigne une isométrie de $\mathbb{C}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = \dfrac{f(z) - f(0)}{f(1) - f(0)}$.

6. Montrer que g est une isométrie de $\mathbb{C}$.

7. Vérifier que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

8. Montrer que $g(i) \in \mathbb{U}$ et que $|g(i) - 1| = \sqrt{2}$.

9. En déduire que $g(i) = i$ ou $g(i) = -i$. Ind : utiliser le résultat de la question 4.

10. On suppose dans cette question que $g(i) = i$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

    10.1 Montrer que $\mathrm{Re}(g(z)) = \mathrm{Re}(z)$. Ind : utiliser le résultat de la question 3.2.

    10.2 Montrer que $\mathrm{Im}(g(z)) = \mathrm{Im}(z)$. Ind : utiliser le résultat des questions 3.2 et 5.

    10.3 Montrer que $g(z) = z$.

    10.4 En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$

11. On suppose dans cette question que $g(i) = -i$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = a\overline{z} + b$.
    Indication : considérer l'application h définie par : $h(z) = \overline{g(z)}$.

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END