Devoir Surveillé $N°$ 2

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

PCSI

Questions de cours

1. Rappeler la définition d'une application injective.
2. Rappeler la définition d'une application surjective.
   Soit $f : E \to F$ une application, A une partie de E et B une partie de F.
3. Rappeler la définition de $f(A)$.
4. Rappeler la définition de $f^{-1}(B)$.
5. Rappeler la définition de $\mathbb{U}$.
6. Rappeler la définition de $\mathbb{U}_n$.

Exercice 1

Soit $f : E \to F$ une application. Soit $\mathscr{R}$ la relation binaire définie sur E par : pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$x\mathscr{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

Exercice 2

Soit z un nombre complexe de module 1 différent de 1, montrer que $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 3

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $z = \omega + \dfrac{1}{\omega}$.

1. Vérifier que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
2. Montrer que $z^2 + z = 1$.
3. En déduire la valeur de z, puis la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

PROBLÈME

Triangle équilatéral

Dans tout le problème a , b et c désigne des nombres complexes et j le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Questions préliminaires

1. Montrer que $j^3 = 1$.
2. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Soit z un nombre complexe. Montrer que si $z \in \mathbb{U}$ alors $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

Première partie :
D'une équation algébrique vers un triangle équilatéral

On suppose (seulement) dans cette partie que

$$aj^2 + bj + c = 0$$

4. Montrer que $a - c = j(b - a)$.
5. Montrer que $b - c = j^2(a - b)$.
6. En déduire que $|a - b| = |a - c| = |b - c|$.

Deuxième partie :
D'un triangle équilatéral vers une équation algébrique

On suppose dans cette partie que

$$|a - b| = |a - c| = |b - c| \neq 0$$

7. Justifier que les deux nombres complexes $\dfrac{a-b}{c-a}$ et $\dfrac{b-c}{c-a}$ sont dans $\mathbb{U}$.
8. En déduire qu'il existe $z, z' \in \mathbb{U}$ tels que $a - b = z(c - a)$ et $b - c = z'(c - a)$.
9. Montrer que $1 + z + z' = 0$.
10. Montrer que $1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z'} = 0$.
11. En déduire que $zz' = 1$
12. Montrer que $(z - j)(z' - j) = 0$, en déduire que $z = j$ ou $z' = j$.
13. Montrer que si $z' = j$ alors $aj^2 + bj + c = 0$.