Corrigé

Devoir Surveillé N° 2

z Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction. $\overline{z}$

PCSI

Questions de cours

Cours

Exercice 1

Soit $f : E \to F$ une application. Soit $\mathscr{R}$ la relation binaire définie sur E par : pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$x\mathscr{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Soit $x \in E$, on a $f(x) = f(x)$ donc $x\mathscr{R}x$.
Soit $x, y \in E$ tels que $x\mathscr{R}y$, on a $f(x) = f(y)$, donc $f(y) = f(x)$, par suite $y\mathscr{R}x$.
Soit $x, y, z \in E$ tels que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$, on a donc $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$, donc $f(x) = f(z)$, par suite $x\mathscr{R}z$.
On en déduit alors que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

Exercice 2

Soit z un nombre complexe de module 1 différent de 1, montrer que $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}$.

On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z} + \overline{\frac{1}{1-z}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-\overline{z}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-z+1-\overline{z}}{(1-z)(1-\overline{z})}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2-2\,\mathrm{Re}(z)}{1-\overline{z}-z+z\overline{z}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2-2\,\mathrm{Re}(z)}{2-2\,\mathrm{Re}(z)}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 3

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $z = \omega + \dfrac{1}{\omega}$.

1. On a $\omega \neq 1$ et $\omega^5 = 1$, donc $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \dfrac{1-\omega^5}{1-\omega} = 0$.
2. On a

$$\begin{aligned}
z^2 + z &= \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 + \omega + \frac{1}{\omega} = \omega^2 + 2 + \frac{1}{\omega^2} + \omega + \frac{1}{\omega} \\
&= \left(\omega^2 + 1 + \frac{1}{\omega^2} + \omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 \\
&= \frac{1}{\omega^2}\left(\omega^4 + \omega^2 + 1 + \omega^3 + \omega\right) + 1 = 0 + 1 = 1
\end{aligned}$$

3. D'après le résultat de la question précédente, z est solution de l'équation $X^2 + X - 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 + 4 = 5$, donc

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

D'autre part, on a sait que $z = \omega + \overline{\omega} = 2\,\mathrm{Re}(\omega) = 2\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$ car $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$. D'où $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ car $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < 0$. On en déduit alors que $2\cos(\frac{2\pi}{5}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, et donc

$$\cos(\frac{2\pi}{5}) = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$$

PROBLÈME

Triangle équilatéral

Dans tout le problème a , b et c désigne des nombres complexes et j le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Questions préliminaires

1. $j^3 = (e^{\frac{2i\pi}{3}})^3 = e^{2i\pi} = 1$.

2. On a $j \neq 1$, donc $1 + j + j^2 = \dfrac{1 - j^3}{1 - j} = 0$.

3. Soit $z \in \mathbb{U}$, on a $z\overline{z} = |z|^2 = 1$, donc $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

Première partie : D'une équation algébrique vers un triangle équilatéral

On suppose (seulement) dans cette partie que

$$aj^2 + bj + c = 0$$

4. Remarquons d'abord que $-c = aj^2 + bj$, donc

$$a - c = a + aj^2 + bj = a\underbrace{(j^2 + 1)}_{=-j} + bj = -aj + bj = j(b - a)$$

5. De même on a

$$b - c = b + aj^2 + bj = aj^2 + b\underbrace{(1 + j)}_{=-j^2} = aj^2 - bj^2 = j^2(a - b)$$

6. On a $a - c = j(b - a)$, donc $|a - c| = |j(b - a)| = |j||b - a| = |b - a|$.
De même, on a $b - c = j^2(a - b)$, donc $|b - c| = |j^2(a - b)| = |j^2||a - b| = |a - b|$.
Il vient alors que $|a - b| = |a - c| = |b - c|$.

Deuxième partie : D'un triangle équilatéral vers une équation algébrique

On suppose dans cette partie que

$$|a - b| = |a - c| = |b - c| \neq 0$$

$\boxed{7.}$ Remarquons d'abord que $c-a \neq 0$ car $|c-a| \neq 0$.
On a $\left|\dfrac{a-b}{c-a}\right| = \dfrac{|a-b|}{|c-a|} = 1$, donc $\dfrac{a-b}{c-a} \in \mathbb{U}$.
De même, on a $\left|\dfrac{b-c}{c-a}\right| = \dfrac{|b-c|}{|c-a|} = 1$, donc $\dfrac{b-c}{c-a} \in \mathbb{U}$.

$\boxed{8.}$ Posons $z = \dfrac{a-b}{c-a}$ et $z' = \dfrac{b-c}{c-a}$. d'après le résultat de la question précédente, $z, z' \in \mathbb{U}$. De plus on a $a-b = z(c-a)$ et $b-c = z'(c-a)$.

$\boxed{9.}$ On a $a-c = a-b+b-c = z(c-a)+z'(c-a) = (z+z')(c-a)$, donc $-1 = z+z'$ car $c-a \neq 0$, par suite $1+z+z' = 0$.

$\boxed{10.}$ On a $1+z+z' = 0$, en passant au conjugué, on obtient $1+\overline{z}+\overline{z'} = 0$, comme $z, z' \in \mathbb{U}$, on a donc $1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z'} = 0$.

$\boxed{11.}$ Remarquons que $1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z'} = \dfrac{zz'+z+z'}{zz'}$, donc $zz'+z+z' = 0$, d'où $zz' = -(z+z') = -(-1) = 1$.

$\boxed{12.}$ On a $(z-j)(z'-j) = zz'-zj-z'j+j^2 = zz'-j(z+z')+j^2 = 1+j+j^2 = 0$.
Puisque $(z-j)(z'-j) = 0$, on a donc $z-j = 0$ ou $z'-j = 0$ c'est-à-dire $z = j$ ou $z' = j$.

$\boxed{13.}$ Supposons que $z' = j$.
Dans ce cas $b-c = j(c-a)$, donc $ja+b-c(1+j) = 0$ ou encore $ja+b+cj^2 = 0$, en multipliant par j, on obtient $aj^2+bj+c = 0$.