Corrigé

Devoir Surveillé N° 2

$\overline{z}$ Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation. z

PCSI

Questions de cours

Cours | Cours

Exercice 1

Résolution du système linéaire :

$$\begin{cases} x+2y+z &= 3 \\ 2x+2y+3z &= 4 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y+z &= 3 \\ -2y+z &= -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z &= 3 \\ y &= \frac{1}{2}z+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x &= -2y-z+3=-2z+1 \\ y &= \frac{1}{2}z+1 \end{cases}$$, d'où $S=\{(-2z+1,\frac{1}{2}z+1,z)\ /\ z\in\mathbb{R}\}$.

Exercice 2

Résolution du système linéaire :

$$\begin{cases} x+3y+2z+t &= 1 \\ x+4y+z+t &= 2 \\ x+5y+4z+t &= 4 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+3y+2z+t &= 1 \\ y-z &= 1 \\ 2y+2z &= 3 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+3y+2z+t &= 1 \\ y-z &= 1 \\ 4z &= 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x &= -3y-2z-t+1 \\ y &= z+1 \\ z &= \frac{1}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= -\frac{13}{4}-t \\ y &= \frac{5}{4} \\ z &= \frac{1}{4} \end{cases}$$. D'où

$$S=\{(-\frac{13}{4}-t,\frac{5}{4},\frac{1}{4},t)\ /\ t\in\mathbb{R}\}$$

Exercice 3

Linéarisation de $\cos^3(x)$.

$$\cos^3(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\frac{e^{3ix}+3e^{ix}+e^{-ix}+e^{-3ix}}{8}=\frac{2\cos(3x)+6\cos(x)}{8}=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos(x).$$

Exercice 4

Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^7=z^2$:

$z^7=z^2 \Leftrightarrow z^2(z^5-1)=0 \Leftrightarrow z^2=0$ ou $z^5=1 \Leftrightarrow z=0$ ou $z\in\mathbb{U}_5$. Donc

$$S=\{0\}\cup\mathbb{U}_5=\{0\}\cup\{e^{\frac{2ik\pi}{5}}\ /\ k\in[\![0,4]\!]\}.$$

PROBLÈME

Définition : Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application. On dit que f est une **isométrie** de $\mathbb{C}$ si :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \ \ |f(z) - f(z')| = |z - z'|$$

Le but du problème est l'étude des isométries de $\mathbb{C}$.

Première partie : Exemples et propriétés

$\boxed{1.}$ Soit $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$.

$\boxed{1.1}$ $|f_1(z) - f_1(z')| = |az + b - az' - b'| = |a(z - z')| = |a||z - z'| = |z - z'|$ car $|a| = 1$.

$\boxed{1.2}$ $|f_2(z) - f_2(z')| = |a\overline{z} + b - a\overline{z'} - b'| = |a(\overline{z} - \overline{z'})| = |a||\overline{z - z'}| = |z - z'|$.

$\boxed{2.}$ Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une isométrie.

$\boxed{2.1}$ Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = f(z')$. On a $|z - z'| = |f(z) - f(z')| = 0$, donc $z - z' = 0$, ainsi $z = z'$.

$\boxed{2.2}$ Soit $z \in \mathbb{U}$, on a $|f(z) - f(0)| = |z - 0| = |z| = 1$, donc $f(z) - f(0) \in \mathbb{U}$.

$\boxed{2.3}$ Supposons que $f(0) = 0$. Soit $z \in \mathbb{U}$, d'après la question précédente, on a $f(z) - f(0) \in \mathbb{U}$, donc $f(z) \in \mathbb{U}$. D'où $f(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{U}$.

$\boxed{3.}$ Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une isométrie de $\mathbb{C}$ telle que $f(0) = 0$.

$\boxed{3.1}$ $|f(z)| = |f(z) - f(0)| = |z - 0| = |z|$.

$\boxed{3.2}$ On a $|f(z) - f(z')|^2 = \left(f(z) - f(z')\right)\left(\overline{f(z) - f(z')}\right) = f(z)\overline{f(z)} - f(z)\overline{f(z')} - f(z')\overline{f(z)} + f(z')\overline{f(z')}$.
D'autre part on a :
$f(z)\overline{f(z)} = |f(z)|^2$,
$f(z')\overline{f(z')} = |f(z')|^2$, et
$f(z)\overline{f(z')} + f(z')\overline{f(z)} = f(z)\overline{f(z')} + \overline{f(z)\overline{f(z')}} = 2\,\mathrm{Re}(f(z)\overline{f(z')})$.
On en déduit que

$$|f(z) - f(z')|^2 = |f(z)|^2 - 2\,\mathrm{Re}(f(z)\overline{f(z')}) + |f(z')|^2$$

De même on a

$$|z - z'|^2 = |z|^2 - \mathrm{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2$$

Puisque $|f(z) - f(z')|^2 = |z - z'|^2$, il vient que

$$|f(z)|^2 - 2\,\mathrm{Re}(f(z)\overline{f(z')}) + |f(z')|^2 = |f(z)|^2 - 2\,\mathrm{Re}(f(z)\overline{f(z')}) + |f(z')|^2$$

En tenant compte le résultat de la question précédente c'est-à-dire $|f(z)| = |z|$ et $|f(z')| = |z'|$, on obtient $-2\,\mathrm{Re}(f(z)\overline{f(z')}) = -2\,\mathrm{Re}(f(z)\overline{f(z')})$, et donc

$$\mathrm{Re}(f(z)\overline{f(z')}) = \mathrm{Re}(f(z)\overline{f(z')})$$

Deuxième partie : Résultats utiles

$\boxed{4.}$ On pose $\omega = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. on a $|\omega - 1| = \sqrt{2}$, donc $|\omega - 1|^2 = 2$, c'est-à-dire $(x-1)^2 + y^2 = 2$ ou encore $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2$, puisque $x^2 + y^2 = 1$, on a $-2x = 0$, d'où $x = 0$. Mais $y^2 = x^2 + y^2 = 1$, donc $y = 1$ ou $y = -1$ c'est-à-dire $\omega = i$ ou $\omega = -1$.

$\boxed{5.}$ Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a donc $iz = ix - y = -y + ix$, donc $\mathrm{Re}(iz) = -y = -\mathrm{Im}(z)$.

Troisième partie :
Détermination des isométries de $\mathbb{C}$

Dans cette partie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ désigne une isométrie de $\mathbb{C}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = \dfrac{f(z) - f(0)}{f(1) - f(0)}$.

6. $|g(z)-g(z')| = \left|\dfrac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)} - \dfrac{f(z')-f(0)}{f(1)-f(0)}\right| = \left|\dfrac{f(z)-f(z')}{f(1)-f(0)}\right| \dfrac{|f(z)-f(z')|}{|f(1)-f(0)|} = \dfrac{|z-z'|}{|1-0|} = |z-z'|$. Donc g est une isométrie de $\mathbb{C}$.

7. $g(0) = \dfrac{f(0)-f(0)}{f(1)-f(0)} = 0$ et $g(1) = \dfrac{f(1)-f(0)}{f(1)-f(0)} = 1$.

8. Comme g est une isométrie et $g(0) = 0$, on a donc $|g(i)| = |i| = 1$, donc $g(i) \in \mathbb{U}$.
On a aussi $|g(i) - 1| = |g(i) - g(1)| = |i - 1| = \sqrt{2}$.

9. On a $g(i) \in \mathbb{U}$ et $|g(i) - 1| = \sqrt{2}$, d'après le résultat de la question 4., on a $g(i) = i$ ou $g(i) = -i$.

10. On suppose dans cette question que $g(i) = i$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

10.1 On a $\mathrm{Re}(g(z)) = \mathrm{Re}(g(z)\overline{f(1)}) = \mathrm{Re}(z\bar{1}) = \mathrm{Re}(z)$, car $g(1) = 1$.

10.2 On a $\mathrm{Re}(g(z)\overline{g(i)}) = \mathrm{Re}(z\bar{i})$, donc $\mathrm{Re}(g(z)\bar{i}) = \mathrm{Re}(z\bar{i})$, d'où $-\imath(g(z)) = -\mathrm{Im}(z)$, on en déduit que $\mathrm{Im}(g(z)) = \mathrm{Im}(z)$.

10.3 $g(z) = \mathrm{Re}(g(z)) + i\,\mathrm{Im}(g(z)) = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) = z$.

10.4 On a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $g(z) = z$, donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)} = z$. On en déduit alors que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$ où $a = f(1) - f(0)$ et $b = f(0)$. De plus on a $|a| = |f(1) - f(0)| = |1 - 0| = 1$, c'est-à-dire $a \in \mathbb{U}$.

11. On suppose dans cette question que $g(i) = -i$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = a\bar{z} + b$.
On pose $h(z) = \overline{g(z)}$. Alors h est une isométrie car $|h(z) - h(z')| = |\overline{g(z) - g(z')}| = |g(z) - g(z')| = |z - z'|$. $h(0) = \overline{g(0)} = 0$, $h(1) = \overline{g(1)} = 1$ et $g(i) = \overline{g(i)} = i$, D'après ce qui précède, $h(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Donc $g(z) = \bar{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. On en déduit que $f(z) = a\bar{z} + b$, où $a = (f(1) - f(0))$ et $b = f(0)$ et on a $|a| = |f(1) - f(0)| = |1 - 0| = 1$, c'est-à-dire $a \in \mathbb{U}$.

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END