Devoir Surveillé $N°$ 3

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

PCSI

Questions de cours

1. Rappeler, avec précision, le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.
2. Donner la définition de deux nombres premiers entre eux.
3. Donner la définition d'un nombre premier .
4. Rappeler le théorème de Bézout.

Soit $f : E \to F$ une application, A une partie de E et B une partie de F, compléter les assertions suivantes :

5. $y \in f(A) \Leftrightarrow \ldots$.
6. $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow \ldots$.

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $10x + 16y = 6$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $34x + 20y = 21$

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n et $n+1$ sont premiers entre eux.

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que 5 divise $(n+1)^5 - n^5 - 1$.
   Indication : Utiliser la formule de binôme de Newton.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 5 divise $n^5 - n$.
   Indication : Par récurrence sur n.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, 5 divise $n^5 - n$.
4. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $5 \wedge n = 1$ alors 5 divise $n^4 - 1$.
5. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si 5 divise $n^4 - 1$ alors $5 \wedge n = 1$.
   Indication : Bézout.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $a = 2n+1$ et $b = 5n+1$.

1. Déterminer deux entiers u, v tels que $au + bv = 3$.
2. En déduire les valeurs possibles de $d = a \wedge b$.
3. Montrer que si le reste de la division euclidienne de n par 3 est égale à 1, alors $d = 3$. Que vaut d dans les autres cas ?

Exercice 5 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = (X^2-1)Q + a + bX$.
2. Montrer que $a = \frac{1}{2}(P(1) + P(-1))$ et $b = \frac{1}{2}(P(1) - P(-1))$.

PROBLÈME

Autour d'une équation diophantienne

Première partie : Questions préliminaires

Soit a et b deux entiers non nuls. On pose

$$d = a \wedge b$$

1. Montrer qu'ils existent $a', b' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = da'$ et $b = db'$.
2. Justifier que $a' \wedge b' = 1$.
3. Montrer que $a'^2 \wedge b'^2 = 1$
4. En déduire que $a^2 \wedge b^2 = d^2$.
5. Que vaut $a^2 \wedge b^2$ si a^2 divise b^2 ?
6. Montrer, en exploitant ce qui précède, que si a^2 divise b^2 alors a divise b.

Deuxième partie :
Résolution

On considère l'équation

$$(E) : x^2 + y^2 = z^2$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3}$. On note S_E l'ensemble des solutions de (E). Ainsi $(x, y, z) \in S_E$ si, et seulement si, $(x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3}$ et $x^2 + y^2 = z^2$.

7. Soient $x, y, z, k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$(x, y, z) \in S_E \Leftrightarrow (kx, ky, kz) \in S_E.$$

8. Soit $(x, y, z) \in S_E$. on pose $d = x \wedge y$.
   - 8.1 Montrer que d^2 divise z^2.
   - 8.2 En déduire que d divise z.
   - 8.3 Justifier qu'ils existent $x', y', z' \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = dx'$, $y = dy'$ et $z = dz'$. Que vaut $x' \wedge y'$?
   - 8.4 Montrer que $(x', y', z') \in S_E$.
   - 8.5 Montrer que $y' \wedge z' = 1$ et $x' \wedge z' = 1$.
9. Montrer que x' et y' ne peuvent pas être tous les deux impairs.
10. Montrer que x' et y' ne peuvent pas être tous les deux pairs.
11. On suppose que x' est pair, et on pose $x' = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$.
    - 11.1 Montrer qu'ils existent $u, v \in \mathbb{N}^*$ tels que $z' = u + v$ et $y' = u - v$. En déduire que $m^2 = uv$.
    - 11.2 Montrer que u et v sont premiers entre eux.
    - 11.3 On pose $s = m \wedge u$ et $t = m \wedge v$. Montrer que $s^2 = u$ et $t^2 = v$.
      Indication : Utiliser le résultat de la question 4.
    - 11.4 En déduire que $x = 2dst$, $y = d(s^2 - t^2)$ et $z = d(s^2 + t^2)$.

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END