Corrigé

Devoir Surveillé N° 3

q

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

p

PCSI

Questions de cours

Cours | Cours

Exercice 1

1. L'équation : $10x+16y=6$ est équivalente à $5x+8y=3$.
Recherche d'une solution particulière : On a $8=1\times5+3$ puis $5=1\times3+2$ et $3=1\times2+1$. Donc $1=(-1)\times2+3=(-1)((-1)\times3+5)+3=2\times3+(-1)\times5=2(8+(-1)\times5)+(-1)\times5=2\times8+(-3)\times5$. Par suite $3=(-9)\times5+6\times8$. Donc $(-9,6)$ est une solution particulière de l'équation.
Résolution de l'équation : on a $5x+8y=3=5\times(-9)+8\times6$, donc $5(x+9)=8(6-y)$. Il vient alors que 5 divise $8(6-y)$, et comme 5 et 8 sont premiers entre eux, on a donc 5 divise $6-y$, il existe alors $k\in\mathbb{Z}$ tel que $6-y=5k$ ou encore $y=6-5k$. On remplace x dans l'équation on obtient $5(x+9)=8\times5k$, et donc $x+9=8k$, ou encore $x=-9+8k$. d'où $(x,y)=(-9+8k,6-5k)$, on vérifie facilement qu'un élément de la forme $(-9+8k,6-5k)$ où $k\in\mathbb{Z}$ est une solution de l'équation. D'où $S=\{(-9+8k,6-5k)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$.
2. Remarquons que l'équation $34x+20y=21$ est équivalente à $2(17x+10y)=21$, et comme 2 ne divise pas 21, il vient que $S=\emptyset$.

Exercice 2 Soit $n\in\mathbb{N}$. Notons $d=n\wedge(n+1)$. On a d divise n et d divise $n+1$, donc d divise $(n+1)-n=1$. D'où $d=1$.

Exercice 3

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que 5 divise $(n+1)^5-n^5-1$. On a $(n+1)^5=n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1$, donc $(n+1)^5-n^5-1=5n^4+10n^3+10n^2+5n$. Par suite 5 divise $(n+1)^5-n^5-1$.
2. 5 divise 0^5-0.
Soit $n\in\mathbb{N}$, et supposons que 5 divise n^5-n.
On a $(n+1)^5-(n+1)=\left((n+1)^5-n^5-1\right)+\left(n^5-n\right)$, et puisque 5 divise $(n+1)^5-n^5-1$ et 5 divise n^5-n, il vient que 5 divise $(n+1)^5-(n+1)$. La récurrence est établie.
3. Soit $n\in\mathbb{Z}$. Si $n\geq0$, c'est le résultat de la question précédente.
Si $n<0$, dans ce cas $-n\geq0$, et donc 5 divise $(-n)^5-(-n)=-(n^5-n)$. D'où 5 divise n^5-n.
4. On a n divise $n^5-n=n(n^4-1)$ et n premier avec 5 par le théorème de Gauss, 5 divise n^4-1.
5. Soit $n\in\mathbb{Z}$. Si 5 divise n^4-1, alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $n^4-1=5k$ ou encore $nn^3+5(-k)=1$, par conséquent (le théorème de Bézout), 5 et n sont premiers entre eux. .

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $a = 2n+1$ et $b = 5n+1$.

1. $au + bv = 3 \Leftrightarrow (2u+5v)n + u + v = 3$. Il suffit alors que $2u + 5v = 0$ et $u + v = 3$. Le couple $(u, v) = (5, -2)$.
2. d divise a et b, donc d divise $au + bv = 3$. Puisque d positif, on a donc $d = 1$ ou $d = 3$.
3. Si le reste de la division euclidienne de n par 3 est égale à 1, alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3q+1$, donc $a = 6q+3 = 3(2q+1)$ et $b = 15q+6 = 3(3q+2)$ sont divisibles par 3. Par suit 3 divise d. D'après le résultat de a question précédente, on obtient $d = 3$.
Si le reste de la division euclidienne de n par 3 est égale à 2, alors $a = 6q+5$ n'est pas divisible par 3, d'où $d = 1$.
Si le reste de la division euclidienne de n par 3 est nul, alors $a = 6q+1$ n'est pas divisible par 3, d'où $d = 1$.

Exercice 5 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P = (X^2-1)Q + R$ et $\deg R \leq 1$. Il existe alors $a, b \in \mathbb{K}$ tel que $R = a + bX$. D'où $P = (X^2-1)Q + a + bX$.
2. On applique respectivement an 1 et -1, on obtient $P(1) = a + b$ et $P(-1) = a - b$. Clairement $P(1)+P(-1) = 2a$, et donc $a = \frac{1}{2}(P(1)+P(-1))$? de même $P(1)-P(-1) = 2b$, donc $b = \frac{1}{2}(P(1)-P(-1))$.

PROBLÈME

Autour d'une équation diophantienne

Première partie : Questions préliminaires

Soit a et b deux entiers non nuls. On pose

$$d = a \wedge b$$

1. Comme d divise a et b, ils existent $a', b' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = da'$ et $b = db'$.
2. $a' \wedge b' = (\frac{a}{d}) \wedge (\frac{b}{d}) = \dfrac{a \wedge b}{d} = \dfrac{d}{d} = 1$.
3. On suppose par l'absurde que $a'^2 \wedge b'^2 > 1$. Il existe alors un nombre premier p diviseur de $a'^2 \wedge b'^2$. Il vient alors que p divise a'^2 et b'^2. Puisque p premier, on a donc p divise a' et b', par conséquent p divise $a' \wedge b' = 1$ ce qui est absurde. D'où le résultat.
4. $a^2 \wedge b^2 = (da')^2 \wedge (db')^2 = d^2(a' \wedge b') = d^2$ car $a'^2 \wedge b'^2 = 1$.
5. Si a^2 divise b^2 alors $a^2 \wedge b^2 = |a^2| = a^2$.
6. On suppose que a^2 divise b^2, alors $d^2 = a^2 \wedge b^2 = a^2$ c'est-à-dire $d^2 = a^2$. Par conséquent $d = |a|$. il vient alors que $a \wedge b = |a|$, par suite a divise b.

Deuxième partie : Résolution

On considère l'équation

$$(E) : x^2 + y^2 = z^2$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3}$. On note S_E l'ensemble des solutions de (E). Ainsi $(x, y, z) \in S_E$ si, et seulement si, $(x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3}$ et $x^2 + y^2 = z^2$.

7. Soient $x, y, z, k \in \mathbb{N}^*$.

$$(x,y,z) \in S_E \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2 \underset{k\neq 0}{\Leftrightarrow} k^2x^2 + k^2y^2 = k^2z^2 \Leftrightarrow (kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2 \Leftrightarrow (kx, ky, kz) \in S_E.$$

8. Soit $(x,y,z) \in S_E$. on pose $d = x \wedge y$.

8.1 On a d divise x et y, donc d^2 divise x^2 et y^2, par suite d^2 divise $x^2 + y^2 = z^2$.

8.2 On a d^2 divise z^2, d'après le résultat de la question d divise z.

8.3 On a d divise les entiers x , y et z, alors ils existent $x', y', z' \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = dx'$, $y = dy'$ et $z = dz'$. De plus $x' \wedge y' = 1$ (Question 2).

8.4 On a $(dx', dy', dz') = (x,y,z) \in S_E$, par le résultat de la question 7, on obtient $(x', y', z') \in S_E$.

8.5 Soit $\delta = y' \wedge z' = 1$. On a δ divise y' et y', donc δ^2 divise y'^2 et z'^2, par conséquent δ^2 divise $y'^2 - y'^2 = x'^2$, puis, par le résultat de la question 6, δ divise x'. On en déduit que δ divise $x' \wedge y' = 1$. D'où $\delta = 1$.
Avec un même raisonnement, on a $x' \wedge z' = 1$.

9. On suppose que x' et y' sont impairs, et écrivons $x' = 2k+1$ et $y' = 2k'+1$ avec $k, k' \in \mathbb{N}$. Dans ce cas $x'^2 + y'^2 = z'^2$ est un entier pair, par suite z' est pair. Soit alors $l \in \mathbb{N}$ tel que $z' = 2l$. On a donc $(2k+1)^2 + (2k'+1)^2 = 4l^2$, puis $4(k'^2 + k^2 + k + k') + 2 = 4l^2$, ou encore $2 = 4(l^2 - k'^2 - k^2 - k - k')$. Ce qui est impossible car 4 ne divise pas 2.

10. On suppose que x' et y' sont pairs. Dans ce cas 2 divise x' et y' ce qui est impossible car x' et y' sont premiers entre eux.

11. On suppose que x' est pair, et on pose $x' = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$.

11.1 Puisque x' est pair, d'après ce qui précède y' est impair et z' impair. En particulier $y' + z'$ est pair, il existe alors $u \in \mathbb{N}$ tel que $y' + z' = 2u$. De même $z' - y' \geq 0$ est pair, donc il existe $v \in \mathbb{N}$ tel que $z' - y' = 2v$. On a

$$2u + 2v = y' + z' + z' - y' = 2z'$$

Donc $u + v = z'$. On a aussi

$$2u - 2v = y' + y' - z' + y' = 2y'$$

Donc $u - v = y'$.
De plus, $(2m)^2 = x'^2 = z'^2 - y'^2 = (z' + y')(z' - y') = 2u2v = 4uv$. Donc $m^2 = uv$

11.2 On pose $\delta = u \wedge v$. On a δ divise u et v, donc δ divise $u - v$ et $u + v$, ce qui implique que δ divise x' et y'. Puisque x' et y' sont premiers entre eux, on a donc $\delta = 1$.

11.3 On pose $s = m \wedge u$ et $t = m \wedge v$. Montrer que D'après le résulta de la première partie, on a $s^2 = m^2 \wedge u^2$. Donc

$$s^2 = m^2 \wedge u^2 = (uv) \wedge u^2 = u(v \wedge u) = u$$

.
De même, on a $t^2 = m^2 \wedge v^2 = (uv) \wedge v^2 = v(u \wedge v) = v$.

11.4 On a $m^2 = uv = s^2t^2 = (st)^2$, par positivité on a $m = st$. Donc $x = dx' = 2dm = 2dst$.
$y = dy' = d(u - v) = d'(s^2 - t^2)$.
Finalement, $z = dz' = d(u + v) = d(s^2 + t^2)$.

END