بِسمِ اللّٰهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Surveillé $N°$ 4

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

PCSI

Questions de Cours

1. Rappeler le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
2. Rappeler la définition d'un polynôme irréductible.
3. Rappeler la définition d'un polynôme scindé.
4. Rappeler la définition d'une racine de multiplicité m.
5. Quelles sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 1

Soit P le polynôme $P = X^6 - X^3$.

1. Déterminer les racines de P.
2. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme P.
3. Soit F la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^4}{P}$.
   - 3.1 Donner le degré et les pôles de F (dans $\mathbb{C}$).
   - 3.2 Décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 2

Soit P le polynôme $P = X^4 - 4X^3 + 7X^2 - 6X + 2$.

1. Calculer $P(1)$, $P'(1)$ et $P''(1)$.
2. Vérifier que $(X-1)^2$ divise P.
3. En effectuant la division euclidienne de P par $(X-1)^2$, déterminer un polynôme Q tel que $P = (X-1)^2 Q$.
4. Factoriser le polynôme P.

Exercice 3 Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, et Q le polynôme $Q = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_{n-k} X^k$.

1. Montrer que pour tout nombre complexe z de module 1, on a $Q(z) = z^n \overline{P(z)}$.
   On suppose, dans la suite que, pour tout nombre complexe z de module 1 ; on a $|P(z)| = 1$.

2. Montrer que pour tout nombre complexe z de module 1, on a $Q(z)P(z) = z^n$.
3. En déduire que $QP = X^n$
4. En déduire l'ensemble des polynômes P tels que $P(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{U}$.

PROBLÈME

Une suite de polynômes

Première partie :
Un test de divisibilité par $X^2 + 1$

Dans cette partie $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que si $X^2 + 1$ divise P, alors $P(i) = 0$
2. On suppose dans cette question que $P(i) = 0$. Notons R le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$.
   - 2.1 Donner la forme de R.
   - 2.2 Vérifier que $R(i) = 0$.
   - 2.3 Montrer que $R = 0$.

Deuxième partie :
Une suite de polynômes

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n le polynôme $P_n = X^{4n+2} + 1$.

3. Déterminer P_0 et P_1.
4. Factorisation de P_1 :
   - 4.1 Déterminer le degré et le coefficient dominat de P_1.
   - 4.2 Montrer que les racines de P_1 sont les complexes $z_k = e^{\frac{i(2k+1)\pi}{6}}$, où $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$.
   - 4.3 En déduire la factorisation de P_1 dans $\mathbb{C}[X]$.
   - 4.4 Donner (seulement) la forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de la fraction $\dfrac{1}{P}$.

Troisième partie :
Factorisation de P_n

5. Vérifier que $X^2 + 1$ divise P_n.
6. Montrer que $P_n = P_0(X^{2n+1})$.
7. En déduire que $P_n = (X^{2n+1} - i)(X^{2n+1} + i)$.
8. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^{2n+1} = i$. En déduire les solutions de l'équation $z^{2n+1} = -i$.
9. Donner la factorisation de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

END