بِسمِ اللّٰهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Surveillé $N°$ 4

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

PCSI

Questions de Cours

Cours

Exercice 1

Soit P le polynôme $P = X^6 - X^3$.

1. $P(z) = 0$ si, et seulement si, $z^3(z^3 - 1) = 0$ si, et seulement si, $z^3 = 0$ ou $z^3 = 1$ si, et seulement si, $z = 0$ ou $z = 1$ ou $z = j$ ou $z = j^2$ (où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$). Donc les racines de P sont 0 ,1, j , et j^2.

2. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$: Notons d'abord que 0 est une racines d'ordre 3, car X^3 divise P et X^4 ne divise pas P. On a donc 0 racine d'ordre 3 les autre racines sont simples et comme le degré de P est 6 et le coefficient dominant vaut 1,
$$P = X^3(X-1)(X-j)(X-j^2)$$
Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$: Notons que j^2 est le conjugué de j, et $(X-j)(X-j^2) = (X-j)(X-\overline{j}) = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(j)X + 1 = X^2 + X + 1$ et notons que ce polynôme a un discriminant strictement négatif. D'où la factorisation,
$$P = X^3(X-1)(X^2+X+1)$$

3. Soit F la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^4}{P}$.

   3.1 $\deg(F) = 4 - 6 = -2$.
   La forme irréductible de F est $F = \dfrac{X}{X^3-1}$ donc les pôles de F sont les racines de $X^3 - 1$ c'est-à-dire 1, j et j^2
   Remarque : les pôles de F sont simples.

   3.2 Décomposition de F en éléments simples : Comme $\deg F = -2 < 0$, la partie entière de F est nulle. De plus les pôles sont simples donc la forme de la décomposition en éléments simples de F est
   $$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-j} + \frac{c}{X-j^2}$$
   En multipliant par $X-1$, puis on remplace par 1, on obtient $a = \frac{1}{3}$.
   En multipliant par $X-j$, puis on remplace par j, on obtient $a = \frac{j}{3}$.
   En multipliant par $X-j^2$, puis on remplace par j^2, on obtient $a = \frac{j^2}{3}$.

Exercice 2
Soit P le polynôme $P = X^4 - 4X^3 + 7X^2 - 6X + 2$.

1. $P(1) = 0$, $P'(1) = 0$ et $P''(1) = 2$.
2. D'après le résultat de la question précédente 1 est une racine double de P, donc $(X-1)^2$ divise P.
3. En effectuant la division euclidienne de P par $(X-1)^2$, on obtient $P = (X-1)^2(X^2-2X+2)$, d'où $Q = X^2 - 2X + 2$.
4. On a $Q = X^2 - 2X + 2 = (X-1)^2 - 1 = (X-1-i)(X-1+i)$, donc $P = (X-1)^2(X-1-i)(X-1+i)$ dans $C[X]$ et $P = (X-1)^2(X^2-2X+2)$ dans $\mathbb{R}[X]$ (car X^2-2X+2 a un discriminant strictement négatif).

Exercice 3 Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, et Q le polynôme $Q = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_{n-k} X^k$.

1. Soit z un complexe de module 1, donc $\frac{1}{z} = \overline{z}$. Donc

$$\begin{aligned}
Q(z) &= \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_{n-k} z^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_{n-k} \frac{1}{\overline{z}^k} \\
&= \overline{\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z^{-k}} = \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j z^{-n+j}} \quad (j = n-k) \\
&= \overline{z^{-n}} \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j z^j} = z^n \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j z^j} \\
&= z^n \overline{P(z)}
\end{aligned}$$

On suppose, dans la suite que, pour tout nombre complexe z de module 1 ; on a $|P(z)| = 1$.

2. Soit z un complexe de module 1, on a $|P(z)| = 1$, donc $Q(z)P(z) = z^n\overline{P(z)}P(z) = z^n|P(z)|^2 = z^n$.
3. On considère le polynôme $R = QP - X^n$. D'après le résultat de la question précédente, pour tout nombre complexe z de module 1, on a $R(z) = Q(z)P(z) - z^n = 0$, ainsi le polynôme R admet une infinité de racines, donc il est nul. D'où $R = 0$ c'est-à-dire $QP = X^n$.
4. On a $QP = X^n$, donc P divise X^n, il existe alors $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $0 \leq k \leq n$ tel que $P = \lambda X^k$. Puisque $1 \in \mathbb{U}$, $|P(1)| = 1$ c'est-à-dire $|\lambda| = 1$. Il vient alors que P est de la forme $P = \lambda X^k$ où $|\lambda| = 1$. Réciproquement un polynôme de cette forme vérifie la propriété.

PROBLÈME
Une suite de polynômes

Première partie :
Un test de divisibilité par X^2+1

Dans cette partie $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. Si X^2+1 divise P, alors P s'écrit sous la forme $P = (X^2+1)Q$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$, donc $P(i) = (i^2+1)Q(i) = 0$.
2. On suppose dans cette question que $P(i) = 0$. Notons R le reste de la division euclidienne de P par X^2+1.

   2.1 $\deg R \leq 1$, donc R est de la forme $R = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

2.2 $P=(X^2+1)Q+R$, donc $P(i)=(i^2+1)Q(i)+R(i)$, d'où $R(i)=0$.

2.3 On a $R(i)=0$, donc $ai+b=0$ et comme $a,b\in\mathbb{R}$, il vient que $a=b=0$, c'est-à-dire $R=0$.

Deuxième partie : Une suite de polynômes

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note P_n le polynôme $P_n=X^{4n+2}+1$.

3. $P_0=X^2+1$ et $P_1=X^6+1$.

4. Factorisation de P_1 :

4.1 P est de degré 6, le coefficient dominant est 1.

4.2 z racine de P si, et seulement si, $z^6+1=0$
$z^6=-1=e^{i\pi}$ si, et seulement si, $z=e^{\frac{i\pi}{6}+\frac{2ik\pi}{6}}=e^{\frac{i(2k+1)\pi}{6}}$, $k\in\{0,\dots,5\}$.
Les racines de P_1 sont les complexes $z_k=e^{\frac{i(2k+1)\pi}{6}}$, où $k\in\{0,1,\dots,5\}$.

4.3 $P_1=\prod_{k=0}^{5}(X-z_k)=\prod_{k=0}^{5}(X-e^{\frac{i(2k+1)\pi}{6}})$.

4.4 La forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de la fraction $\frac{1}{P}$: Le degré de cette fraction est -6, donc sa partie entière est nulle, d'autre parte les pôles sont simples, d'où la forme :
$\frac{1}{P}=\sum_{k=0}^{5}\frac{\lambda_k}{X-e^{\frac{i(2k+1)\pi}{6}}}$, où les $\lambda_k\in\mathbb{C}$.

Troisième partie : Factorisation de P_n

5. On a $P_n(i)=i^{4n+2}+1=-1+1=0$. D'après le résultat de la question 2. X^2+1 divise P_n

6. $P_0(X^{2n+1})=(X^{2n+1})^2+1=X^{4n+2}+1=P_n$.

7. On a $P_0=X^2+1=(X-i)(X+i)$ donc $P_n=P_0(X^{2n+1})=(X^{2n+1}-i)(X^{2n+1}+i)$.

8. $z^{2n+1}=i$ si, et seulement si, $z^{2n+1}=e^{\frac{i\pi}{2}}$ si, et seulement si, $z=e^{\frac{i\pi}{2(2n+1)}+\frac{2ik\pi}{2n+1}}=e^{\frac{i(4k+1)\pi}{4n+2}}$, $k=0,\dots,2n$.
En déduire les solutions de l'équation $z^{2n+1}=-i$: $z^{2n+1}=-i$ si, et seulement si, $(\overline{z})^{2n+1}=i$ si, et seulement si, $\overline{z}=e^{\frac{i(4k+1)\pi}{4n+2}}$, $k=0,\dots,2n$ si, et seulement si, $z=e^{-\frac{i(4k+1)\pi}{4n+2}}$, $k=0,\dots,2n$

9. D'après ce qui précède les racines de P_n sont les complexes $e^{\frac{i(4k+1)\pi}{4n+2}}$, $e^{-\frac{i(4k+1)\pi}{4n+2}}$ $k=0,\dots,2n$ donc

$$P_n=\prod_{k=0}^{2n}(X-e^{\frac{i(4k+1)\pi}{4n+2}})\prod_{k=0}^{n}(X-e^{-\frac{i(4k+1)\pi}{4n+2}})$$

END