Devoir Surveillé $N°$ 4

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

F *P*

PCSI

Questions de cours

1. Rappeler, avec précision, le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
2. Donner la défintion d'une racine de multiplicité m.
3. Donner la formule de Taylor d'un polynôme de degré $\leq n$.
4. Donner la définition d'un sous espace vectoriel.
5. Rappeler la définition de la somme $(F+G)$ de deux sous espaces vectoriels F et G.
6. Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E, completer : La somme $F+G$ est directe $\Leftrightarrow \ldots$
7. Soit $f: E \to F$ une application, $b \in F$ compléter l'assertion suivante :
$y \in f^{-1}(\{b\}) \Leftrightarrow \ldots$.

Exercice 1

Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x-y-z=0\}$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Vérifier que $(1,1,0) \in F$ et $(1,0,1) \in F$.
On pose $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (1,0,1)$.
3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\alpha u_1 + \beta u_2 \in F$.
4. Soit $u = (x,y,z) \in F$. Montrer que u est une combinaison linéaire de u_1 et u_2.
5. En déduire que $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

Exercice 2

Soit $F = \dfrac{X+1}{(X-1)^2 X} \in \mathbb{R}(X)$.

1. Donner le degré et les pôles de F.
2. Écrire la forme de la décomposition en éléments simples de F.
3. Déterminer la décomposition en éléments simples de F.

PROBLÈME

Autour des polynômes de Lagrange

Première partie : Polynômes de Lagrange

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Pour $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ on pose :

$$L_j = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} \frac{X-a_k}{a_j-a_k}$$

1. Soit $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Quel est le degré de L_j ?

2. Soit $j \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Que vaut $L_j(a_j)$?

3. Soient $i, j \in \{0,1,\dots,n-1\}$ avec $i \neq j$, vérifier que $L_j(a_i) = 0$.

4. Soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. On pose $Q = P - \sum_{j=0}^{n-1} P(a_j)L_j$.

   4.1 Montrer que $0 \leq \forall i \leq n-1$, $Q(a_i) = 0$.

   4.2 En déduire que $P = \sum_{j=0}^{n-1} P(a_j)L_j$

5. Que vaut $\sum_{j=0}^{n-1} L_j$?

6. Montrer que pour tout $0 \leq d \leq n-1$, $X^d = \sum_{j=0}^{n-1} a_j^d L_j$.

7. Soient $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{K}$. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \text{ , } P(a_i) = y_i$$

Deuxième partie :
Cas des racines $n$ème

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et pour $0 \leq k \leq n-1$, $a_k = w^k$ où $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ c'est-à-dire $a_0 = 1$, $a_1 = w$, …, $a_{n-1} = w^{n-1}$. On considère le polynôme $S = \sum_{k=0}^{n-1} X^k = 1 + X + \ldots + X^{n-1}$.

8. Vérifier que 1 n'est pas une racine de S.

9. Montrer que $(1-X)S = 1 - X^n$.

10. Déterminer les racines de S dans $\mathbb{C}$.

11. En déduire la factorisation de S dans $\mathbb{C}[X]$.

12. Montrer que $S = nL_0$.

13. Soit $0 \leq k \leq n-1$, on pose $R_k = L_k - \frac{1}{n}S(w^{-k}X)$

   13.1 Calculer $R_k(a_k)$.

   13.2 Montrer que, pour tout $0 \leq j \leq n-1$, $R_k(a_j) = 0$.

   13.3 En déduire que $L_k = \frac{1}{n}S(w^{-k}X)$.

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END