Corrigé

Devoir Surveillé $N°$ 4

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

PCSI

Questions de cours

Cours

Exercice 1

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - z = 0\}$.

1. On a $0 - 0 - 0 = 0$, donc $0 (= 0_{\mathbb{R}^3}) \in F$.
   Soit $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$ et $(x + \lambda x') - (y + \lambda y') - (z + \lambda z') = (x - y - z) + \lambda(x' - y' - z') = 0$, donc $u + \lambda v \in F$. D'où F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. On a $1 - 1 - 0 = 0$ donc $(1, 1, 0) \in F$, de même $1 - 0 - 1 = 0$ donc $(1, 0, 1) \in F$.
   On pose $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (1, 0, 1)$.
3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a $u_1, u_2 \in F$ et F sous espace vectoriel donc $\alpha u_1 + \beta u_2 \in F$.
4. Soit $u = (x, y, z) \in F$, alors $x = y + z$, donc $u = (y + z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1) = y u_1 + z u_2$. Ainsi u est une combinaison linéaire de u_1 et u_2.
5. D'une part $u_1, u_2 \in F$, donc $\text{Vect}(u_1, u_2) \subseteq F$. D'autre part chaque élément de F est combinaison linéaire de u_1 et u_2, donc $F \subseteq \text{Vect}(u_1, u_2)$. Il en résulte alors que $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

Exercice 2

Soit $F = \dfrac{X + 1}{(X - 1)^2 X} \in \mathbb{R}(X)$.

1. $\deg F = 1 - 3 = -2$ et les pôles de F sont 0 et 1 car $\dfrac{X + 1}{(X - 1)^2 X}$ est irréductible.
2. 0 pôle simple et 1 pôles double, donc $F = \dfrac{a}{X - 1} + \dfrac{b}{(X - 1)^2} + \dfrac{c}{X}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
3. En multipliant F par X, on obtient $\dfrac{X + 1}{(X - 1)^2} = \dfrac{aX}{X - 1} + \dfrac{bX}{(X - 1)^2} + c$, on applique en 0 on trouve $c = 1$.
   En multipliant maintenant F par $(X - 1)^2$, on obtient $\dfrac{X + 1}{X} = a(X - 1) + b + \dfrac{c(X - 1)^2}{X}$, on applique en 1 on trouve $b = 2$.
   On a donc $F = \dfrac{a}{X - 1} + \dfrac{2}{(X - 1)^2} + \dfrac{1}{X}$, on applique (par exemple) en 2, on obtient $a = -1$. D'où
   $$F = -\frac{1}{X - 1} + \frac{2}{(X - 1)^2} + \frac{1}{X}$$

PROBLÈME

Autour des polynômes de Lagrange

Première partie : Polynômes de Lagrange

Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Pour $j \in \{0,1,\dots,n-1\}$ on pose :

$$L_j = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1} \frac{X-a_k}{a_j-a_k}$$

1. Soit $j \in \{0,1,\dots,n-1\}$. $\deg L_j = n-1$.

2. Soit $j \in \{0,1,\dots,n-1\}$. $L_j(a_j) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1} \frac{a_j-a_k}{a_j-a_k} = 1$.

3. Soient $i, j \in \{0,1,\dots,n-1\}$ avec $i \neq j$. On a $L_j = \frac{X-a_i}{a_j-a_i} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j,i}}^{n-1} \frac{X-a_k}{a_j-a_k}$, en d'autres termes $X-a_i$ divise L_j, donc $L_j(a_i) = 0$.

4. Soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. On pose $Q = P - \sum_{j=0}^{n-1} P(a_j)L_j$.

   4.1 Soit $0 \leq i \leq n-1$, alors
   $$Q(a_i) = P(a_i) - \sum_{j=0}^{n-1} P(a_j)L_j(a_i) = P(a_i) - P(a_i)L_i(a_i) - \sum_{j=0, j\neq i}^{n-1} P(a_i)\underbrace{L_j(a_i)}_{=0} = P(a_i) - P(a_i) = 0.$$

   4.2 Les polynômes L_j et P sont de degré $\leq n-1$, donc Q aussi. Puisque Q admet n racines distinctes et $\deg Q \leq n-1$, on a donc $Q = 0$, par suite $P = \sum_{j=1}^{n-1} P(a_j)L_j$.

5. On applique l'égalité précédente pour $P = 1$, o obtient $\sum_{j=0}^{n-1} L_j = 1$

6. SI $0 \leq d \leq n-1$, alors X^d est un polynôme de degré $\leq n-1$, on a donc (pour $P = X^d$), $X^d = \sum_{j=0}^{n-1} a_j^d L_j$.

7. Il suffit de considérer le polynôme $P = \sum_{j=0}^{n-1} y_j L_j$, ce polynôme vérifie $P(a_i) = y_i$.

Deuxième partie : Cas des racines $n$ème

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et pour $0 \leq k \leq n-1$, $a_k = w^k$ où $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ c'est-à-dire $a_0 = 1$, $a_1 = w$, ..., $a_{n-1} = w^{n-1}$. On considère le polynôme $S = \sum_{k=0}^{n-1} X^k = 1 + X + \dots + X^{n-1}$.

8. O a $S(1) = n$ donc 1 n'est pas une racine de S.

9. On a $(1-X)S = (1-X)(1+X+\dots+X^{n-1}) = 1 - X^n$.

$\boxed{10.}$ Notons que 1 n'est pas une racine de S. Alors z est une racine de S si, et seulement si, $z \neq 1$ et $(1-z)S(z) = 0$ si, et seulement si, $z \neq 1$ et $z^n = 1$ si, et seulement si, $z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$. Ainsi les racines de S sont les nombres complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k = 1, \ldots, n-1$ c'est-à-dire les nombres complexes $a_1, \ldots, a_{n-1}$.

$\boxed{11.}$ Le coefficient dominant de S est 1 et $\deg S = n-1$, donc $a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont les racines (donc simples) de S, d'où

$$S = (X-a_1)\ldots(X-a_{n-1}) = \prod_{k=1}^{n-1}(X-a_k)$$

$\boxed{12.}$ On a $L_0 = \dfrac{(X-a_1)\ldots(X-a_{n-1})}{(a_0-a_1)\ldots(a_0-a_{n-1})} = \dfrac{(X-a_1)\ldots(X-a_{n-1})}{(1-a_1)\ldots(1-a_{n-1})} = \dfrac{S}{S(1)} = \dfrac{S}{n}$, donc $S = nL_0$.

$\boxed{13.}$ Soit $0 \leq k \leq n-1$, on pose $R_k = L_k - \dfrac{1}{n}S(w^{-k}X)$

$\boxed{13.1}$ On a $R_k(a_k) = L_k(a_k) - \dfrac{1}{n}S(w^{-k}a_k) = 1 - \dfrac{1}{n}S(w^{-k}w^k) = 1 - \dfrac{1}{n}S(1) = 0$.

$\boxed{13.2}$ Soit $0 \leq j \leq n-1$.
Si $j = k$, alors $R_k(a_j) = R_k(a_k) = 0$ (d'après le résulta de la question précédente).
Si $j \neq k$, alors $Lk(a_j) = 0$. Dans ce cas $w^k = a_k \neq a_j$, et donc $w^{-k}a_j \neq 1$, par suite $S(w^{-k}a_j) = \dfrac{(w^{-k}a_j)^n - 1}{w^{-k}a_j - 1} = 0$ car $(w^{-k}a_j)^n = 1$, d'où $R_k(a_j) = 0$.

$\boxed{13.3}$ R_k est un polynôme de degré $\leq n-1$ ayant au moins n racines (a_j avec $0 \leq j \leq n-1$), donc il est nul, on en déduit alors que $L_k = \dfrac{1}{n}S(w^{-k}X)$.

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END