بِسمِ اللّهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Surveillé $N°$ 5

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

PCSI

Questions de Cours

1. Rappeler la définition d'une famille libre.
2. Rappeler la définition d'une famille génératrice d'un espace vectoriel.
3. Rappeler la définition d'une base d'un espace vectoriel.
4. Rappeler la définition d'une application linéaire.
5. Rappeler la définition du noyau ($\ker f$) d'une application linéaire f.

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$, et considère les deux parties :

$$F=\{(x,y,z)\in E\ /\ x+y+z=0\} \quad \text{et} \quad G=\mathrm{Vect}((1,1,1))$$

1. Quelle est la forme des éléments de G ?
2. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E.
3. Déterminer une base de F.
4. Montrer que la somme $F+G$ est directe.
5. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On pose $s=x+y+z$.
   - 5.1 Que dire de u si $s=0$?
   - 5.2 Vérifier que $u=(x-\frac{s}{3}, y-\frac{s}{3}, z-\frac{s}{3})+\frac{s}{3}(1,1,1)$.
   - 5.3 En déduire que $E=F\oplus G$.

Exercice 2

Soit $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y,z,t)=x-2y+z-2t$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. On considère les vecteurs $v_1=(2,1,0,0)$, $v_2=(-1,0,1,0)$ et $v_3=(2,0,0,1)$.
   Montrer que la famille (v_1,v_2,v_3) est une base du $\ker f$.
3. Montrer que la somme $\mathrm{Vect}((1,1,1,1))+\ker f$ est directe.

PROBLÈME

Endomorphisme nilpotent

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E (application linéaire de E vers E).
On rappelle que $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour $n \geq 1$, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

On dit que f est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier naturel $q \in \mathbb{N}$ tel que $f^q = 0$.

Première partie : Exemples d'endomorphismes nilpotents

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (2y, 3z, 0)$.
   - 1.1 Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   - 1.2 Calculer $f^2(x, y, z)$.
   - 1.3 Vérifier que f est nilpotent.
2. Soit $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ l'application définie par $f(P) = P'$.
   - 2.1 Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.
   - 2.2 Montrer que f est nilpotent.

Deuxième partie : Indice de nilpotence

Dans cette partie f est un endomorphisme *nilpotent* de E.

3. Soit $A = \{k \in \mathbb{N} \ / \ f^k = 0\}$.
   - 3.1 Vérifier que A est non vide .
   - 3.2 En déduire que A admet un plus petit élément p.
   - 3.3 Vérifier que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.
     L'entier p s'appelle l'indice de nilpotence de f.
4. Montrer que $\left(\mathrm{Id}_E - f\right)\left(\sum_{k=0}^{p-1} f^k\right) = \mathrm{Id}_E$.
5. En déduire que $\mathrm{Id}_E - f$ est un isomorphisme et déterminer $\left(\mathrm{Id}_E - f\right)^{-1}$ en fonction de f.

Troisième partie : Cas d'indice de nilpotence égale à 3

Dans cette partie f est un endomorphisme nilpotent de E d'indice de nilpotence égale à 3 c'est-à-dire $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

6. Montrer que $\mathrm{Im}\, f^2 \subseteq \ker f$.
7. Justifier l'existence d'un vecteur $v \in E$ tel que $f^2(v) \neq 0$.
8. Montrer que la famille $(v, f(v), f^2(v))$ est libre.
9. Montrer que la famille (Id_E, f, f^2) est libre.
10. Montrer que $\ker f \subseteq \ker f^2$.
11. Montrer que $\ker f \neq \ker f^2$.
    Indication : on pourra considérer le vecteur $f(v)$.

END