Devoir Surveillé $N°$ 5

ker

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

Im

PCSI

Questions de cours

1. Rappeler la définition d'une famille libre .
2. Rappeler la définition d'une application linéaire .
3. Rappeler la définition du $\ker f$ où f est une application linéaire .
4. Rappeler la définition de $\operatorname{Im} f$ où f est une application linéaire .
5. Rappler la définition d'un projecteur d'un espace vectorile E.
6. Rappler la définition de deux sous espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montre que $\ker f = \ker f^2$ si, et seulement si, $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ si, et seulement si, $\ker f + \operatorname{Im} f = E$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel et p un projecteur de E. Montrer que $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur de E.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par ;

$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$.
4. Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f^2(x, y, z) = (x - 2y + z, x + y - 2z, -2x + y + z)$.
5. Montrer que $\ker f^2 = \mathrm{Vect}(1, 1, 1)$.

PROBLÈME

Commutant d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel. Si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $\mathscr{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f c'est-à-dire $\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) \ / \ fg = gf\}$.

Première partie :
Propriétés du commutant

Soit f un endomorphisme de E.

1. Montrer que $\mathrm{Id}_E \in \mathscr{C}(f)$.
2. Montrer que $\mathscr{C}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
3. Montrer que si $g, h \in \mathscr{C}(f)$ alors $gh \in \mathscr{C}(f)$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathscr{C}(f)$.
5. En déduire que si $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ alors $a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \ldots + a_n f^n \in \mathscr{C}(f)$.
6. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $g \in \mathscr{C}(f)$ si, et seulement si, $f \in \mathscr{C}(g)$.

Deuxième partie :
Sous espaces stables

Dans cette partie f désigne un endomorphisme de E, et g un endomorphisme de E qui commute avec f c'est-à-dire $fg = gf$.

7. Montrer que pour tout $x \in \ker f$, $g(x) \in \ker f$.
8. Montrer que pour tout $x \in \operatorname{Im} f$, $g(x) \in \operatorname{Im} f$.
9. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
   - 9.1 Justifier que $f - \lambda \mathrm{Id}_E \in \mathscr{C}(g)$.
   - 9.2 En déduire que si $x \in \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ alors $g(x) \in \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

Troisième partie :
Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie E est l'espace vectoriel $E := \mathbb{R}^3$, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de E. Soit f l'unique endomorphisme de E vérifiant $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = 2e_2$ et $f(e_3) = 3e_3$.

10. Soit $u = (x, y, z) \in E$.
    - 10.1 Écrire u sous forme de combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3.
    - 10.2 En déduire l'expression de $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.
11. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ et h l'endomorphisme de E définie par $h(x, y, z) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z)$. Montrer que $h \in \mathscr{C}(f)$.
12. Montrer que $\ker(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(e_1)$.
13. Montrer que $\ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(e_2)$.
14. Montrer que $\ker(f - 3\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(e_3)$.

Soit $g \in \mathscr{C}(f)$ c'est-à-dire g est un endomorphisme de E qui commute avec f.

15. Montrer que $g(e_1) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. En déduire qu'il existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_1) = \alpha_1 e_1$.
16. Montrer qu'il existent $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $g(e_2) = \alpha_2 e_2$ et $g(e_3) = \alpha_3 e_3$.
17. En déduire que pour tout $(x, y, z) \in E$, $g(x, y, z) = (\alpha_1 x, \alpha_2 y, \alpha_3 z)$.

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END