Corrigé

Devoir Surveillé $N°$ 5

ker

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

Im

PCSI

Questions de cours

Cours

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. On suppose que $\ker f = \ker f^2$.
Soit $s \in \operatorname{Im} f \cap \ker f$. Alors $f(x) = 0$ et il existe $x' \in E$ tel que $x = f(x')$, ainsi $f^2(x') = f(x) = 0$, donc $x' \ker f^2 = \ker f$, par suite $f(x') = 0$, d'où $x = f(x') = 0$.
Supposons que $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$. Si $x \in \ker f$, alors $f(x) = 0$, donc $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$, d'où $x \in \ker f^2$. on a donc $\ker f \subseteq \ker f^2$.
Soit $x \in \ker f^2$, donc $f^2(x) = 0$, c'est-à-dire $f(f(x)) = 0$, par suite $f(x) \in \ker f$, or $f(x) \in \operatorname{Im} f$, on a donc $f(x) \in \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$, il en résulte alors que $f(x) = 0$ et donc $x \in \ker f$. D'où le résultat.

2. Supposons que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
Clairement, $\ker f + \operatorname{Im} f \subseteq E$. Maintenant, soit $x \in E$. On a $f(x) \in \operatorname{Im} f$, donc $f(x) \in \operatorname{Im} f^2$, il existe alors $x' \in E$ tel que $f(x) = f^2(x')$, ainsi $f(x - f(x')) = 0$, par suite $x - f(x') \in \ker f$. Si on pose $z = x - f(x')$, alors $x = z + f(x')$ et $z \in \ker f$ et $f(x') \in \operatorname{Im} f$, d'où $x \in \ker f + \operatorname{Im} f$.
Réciproquement, supposons que $\ker f + \operatorname{Im} f = E$. Si $y \in \operatorname{Im} f^2$, alors il existe $x' \in E$ tel que $y = f^2(x')$, donc $y = f(f(x')) \in \operatorname{Im} f$, d'où $\operatorname{Im} f^2 \subseteq \operatorname{Im} f$. Soit maintenant $y \in \operatorname{Im} f$, il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in E = \ker f + \operatorname{Im} f$, il existent $z \in \ker f$ et $y' \in \operatorname{Im} f$ tel que $x = z + y'$. On a aussi $y \in \operatorname{Im} f$, il existe alors $x' \in E$ tel que $y' = f(x')$. D'où $y = f(z + f(x')) = f(z) + f^2(x') = f^2(x') \in \operatorname{Im} f^2$. D'où le résultat.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel et p un projecteur de E.
D'abord $\mathrm{Id}_E - p$ est un endomorphisme de E.
$(\mathrm{Id}_E - p)^2 = \mathrm{Id}_E^2 - \mathrm{Id}_E\, p - p\, \mathrm{Id}_E + p^2 = \mathrm{Id}_E - 2p + p^2 = \mathrm{Id}_E - 2p + p = \mathrm{Id}_E - p$. Donc $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur de E.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par ;

$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$$

1. Soit $u=(x,y,z), v=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{array}{rcl} f(u+\lambda v) &=& f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z') \\ &=& (x+\lambda x'-(y+\lambda y'), y+\lambda-(z+\lambda z'), z+\lambda z'-(x+\lambda x')) \\ &=& (x-y, y-z, z-x)+\lambda(x'-y', y'-z', z'-x') \\ &=& f(u)+\lambda f(v) \end{array}$$

f est donc une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. $(x,y,z)\in\ker f$ si, et seulement si, $(x-y,y-z,z-x)=0$ si, et seulement si, $x-y=0$, $y-z=0$ et $z-x=0$ si, et seulement si, $x=y=z$ si, et seulement si, $(x,y,z)=x(1,1,1)$. d'où $\ker f=\mathrm{Vect}(1,1,1)$.

3.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im} f &=& \{(x,yz)\ /\ x,y,z\in\mathbb{R}\} \\ &=& \{(x-y,y-z,z-x)\ /x,y,z\in\mathbb{R}\} \\ &=& \{x(1,0,-1)+y(0,1,-1)+z(-1,0,1)\ x,y,z\in\mathbb{R}\} \\ &=& \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1),(-1,0,1)) \end{array}$$

4. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{array}{rcl} f^2(x,y,z) &=& f(x-y,y-z,z-x) \\ &=& (x-y-y+z, y-z-z+x, z-x-x+y) \\ &=& (x-2y+z, x+y-2z, -2x+y+z) \end{array}$$

5. $(x,y,z)\ker f^2$ si, et seulement si, $f^2(x,y,z)=0$ si, et seulement si, $\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+z &=& 0 \\ x+y-2z &=& 0 \\ -2x+y+z &=& 0 \end{array}\right.$ si, et seulement si, $(L_3\leftarrow L_3+2L_1$ et $L_2\leftarrow L_2-L_1)$ $\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+z &=& 0 \\ 3y-3z &=& 0 \\ -3y+3z &=& 0 \end{array}\right.$ si, et seulement si, $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2y-z=z \\ y &=& z \end{array}\right.$ si, et seulement si, $x=y=z$. D'où $\ker f^2=\mathrm{Vect}(1,1,1)$.

PROBLÈME

Commutant d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel. Si $f\in\mathscr{L}(E)$, on note $\mathscr{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f c'est-à-dire $\mathscr{C}(f)=\{g\in\mathscr{L}(E)\ /\ fg=gf\}$.

Première partie : Propriétés du commutant

Soit f un endomorphisme de E.

1. On a $\mathrm{Id}_E f=f\,\mathrm{Id}_E$, donc $\mathrm{Id}_E\in\mathscr{C}(f)$.

2. On a $0f=0=f0$, donc $0\in\mathscr{C}(f)$.
Soit $g,h\in\mathscr{L}(f)$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.
On a $(g+\lambda h)f=gf+\lambda hf=fg+\lambda fh=f(g+\lambda h)$. Donc $g+\lambda h\in\mathscr{C}(f)$. $\mathscr{C}(f)$ est donc un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

3. Soit $g, h \in \mathscr{C}(f)$. On a

$$(gh)f = g(hf) = g(fh) = (gf)h = (fg)h = f(gh)$$

Donc $gh \in \mathscr{C}(f)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, On a $f^n f = f^{n+1} = f f^n$ donc $f^n \in \mathscr{C}(f)$.

5. On a $\mathrm{Id}_E, f, \dots f^n \in \mathscr{C}(f)$ et $\mathscr{C}(f)$ sous espace vectoriel, donc $a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \dots + a_n f^n \in \mathscr{C}(f)$.

6. $g \in \mathscr{C}(f)$ si, et seulement si, $fg = gf$ si, et seulement si, $f \in \mathscr{C}(g)$.

Deuxième partie :
Sous espaces stables

Dans cette partie f désigne un endomorphisme de E, et g un endomorphisme de E qui commute avec f c'est-à-dire $fg = gf$.

7. Soit $x \in \ker f$, on q $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0) = 0$, donc $g(x) \in \ker f$.

8. Soit $x \in \operatorname{Im} f$, il existe $x' \in E$ tel que $x = f(x')$, donc $g(x) = g(f(x')) = f(g(x')) \in \operatorname{Im} f$.

9. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

   9.1 On a $\mathrm{Id}_E, f \in \mathscr{C}(g)$ et $\mathscr{C}(g)$ sous espace vectoriel, donc $f - \lambda \mathrm{Id}_E \in \mathscr{C}(g)$.

   9.2 Soit $x \in \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$, puisque g commute avec $f - \lambda \mathrm{Id}_E$, d'après le résultat de la question 7, on a $g(x) \in \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

Troisième partie :
Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie E est l'espace vectoriel $E := \mathbb{R}^3$, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de E. Soit f l'unique endomorphisme de E vérifiant $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = 2e_2$ et $f(e_3) = 3e_3$.

10. Soit $u = (x, y, z) \in E$.

    10.1 $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

    10.2 $f(x, y, z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + y(e_2) + zf(e_3) = xe_1 + 2ye_2 + 3ze_3 = (x, 2y, 3z)$.

11. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ et h l'endomorphisme de E définie par $h(x, y, z) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z)$. $(hf)(x, y, z) = h(f(x, y, z)) = h(x, 2y, 3z) = (\lambda_1 x, 2\lambda_2 y, 3\lambda_3 z)$ et de même on a $(fh)(x, y, z) = f(h(x, y, z)) = f(\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z) = (\lambda_1 x, 2\lambda_2 y, 3\lambda_3 z)$. Donc $hf = fh$.

12. $(x, y, z) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ si, et seulement si, $(0, y, 2z) = 0$ si, et seulement si, $y = z = 0$. Donc

$$\ker(f - \underset{E}{\mathrm{Id}}) = \mathrm{Vect}(e_1)$$

13. $(x, y, z) \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E)$ si, et seulement si, $(-x, 0, z) = 0$ si, et seulement si, $x = z = 0$. Donc

$$\ker(f - \underset{E}{\mathrm{Id}}) = \mathrm{Vect}(e_2)$$

14. $(x, y, z) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_E)$ si, et seulement si, $(-2x, -y, 0) = 0$ si, et seulement si, $x = y = 0$. Donc

$$\ker(f - \underset{E}{\mathrm{Id}}) = \mathrm{Vect}(e_3)$$

Soit $g \in \mathscr{C}(f)$ c'est-à-dire g est un endomorphisme de E qui commute avec f.

15. On a $e_1 \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et g commute avec f, d'après de résultat de la question 9.2, on a $g(e_1) \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. On a $g(e_1) \in \mathrm{Vect}(e_1)$, il existe alors $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_1) = \alpha_1 e_1$.

16. De même, que la question précédente, $e_2 \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E)$ et $e_3 \in \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_E)$, donc (par le résultat de la question 9.2) $g(e_2) \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E)$ et $g(e_3) \in \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_E)$, il existent alors $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $g(e_2) = \alpha_2 e_2$ et $g(e_3) = \alpha_3 e_3$.

17. Soit $(x, y, z) \in E$, on a

$$\begin{array}{rcl} g(x,y,z) & = & g(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ & = & xg(e_1) + yg(e_2) + zg(e_3) \\ & = & x\alpha_1 e_1 + y\alpha_2 e_2 + z\alpha_3 e_3 \\ & = & (\alpha_1 x, \alpha_2 y, \alpha_3 z) \end{array}$$

حظ سعيد للجميع

Bonne chance

END