بِسمِ اللّٰهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Surveillé $N°$ 6

dim — rg — PCSI

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

Questions de Cours

1. Rappeler la définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie .
2. Rappeler la formule de Grassmann.
3. Rappeler la définition du rang d'une famille de vecteurs $(u_1,\dots,u_n)$.
4. Rappeler la définition du rang d'une application linéaire.
5. Rappeler la formule du rang.

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$, et considère les deux parties :

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x-2y+z=0\}\quad \text{et}\quad G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ 2x-y=0\,,\ \ x-z=0\}$$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E
2. Montrer que G est un sous espace vectoriel de E.
3. Montrer que $F=\text{Vect}((2,1,0),(1,0,-1))$.
4. Montrer que $G=\text{Vect}((1,2,1))$.
5. Déterminer respectivement la dimension de F et G.
6. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 2

Soit l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^4$, et notons (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit f l'unique endomorphisme de E vérifiant $f(e_1)=e_1+e_2$, $f(e_2)=f(e_3)=e_1$ et $f(e_4)=-e_1+e_4$.

1. Pour $(x,y,z,t)\in E$, calculer $f(x,y,z,t)$.
2. Déterminer $\ker f$ (sous forme de Vect), puis donner $\dim\ker f$.
3. En déduire $\text{rg}\, f$

PROBLÈME

Commutant d'un endomorphisme

Dans tout le problème E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.
Pour $f, g \in \mathscr{L}(E)$, on rappelle que fg désigne l'endomorphsime $f \circ g$. Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, on rappelle que $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour $n \geq 1$, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $\mathscr{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f c'est-à-dire

$$\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) \ / \ fg = gf\}$$

Première partie :
Structure de $\mathscr{C}(f)$

Dans cette partie f est un endomorphisme de E.

1. Vérifier que $\mathrm{Id}_E \in \mathscr{C}(f)$.
2. Montrer que $\mathscr{C}(f)$ est sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
3. Montrer que si $g, h \in \mathscr{C}(f)$, alors $gh \in \mathscr{C}(f)$.
4. Soit $g \in \mathscr{C}(f)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^n \in \mathscr{C}(f)$.
5. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Montrer que $a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \ldots + a_n f^n \in \mathscr{C}(f)$.

Deuxième partie :
Cas d'un endomorphisme cyclique

Dans toute la **suite du problème** E est un espace vectoriel de **dimension** 3 ($\dim E = 3$).
On suppose dans **cette partie** qu'il existe $v \in E$ tel que la famille $(v, f(v), f^2(v))$ est **libre**.

6. Montrer que $(v, f(v), f^2(v))$ est une base de E.
7. Soient $g, h \in \mathscr{C}(f)$ tels que $g(v) = h(v)$.
   - 7.1 Montrer que $g(f(v)) = h(f(v))$.
   - 7.2 Montrer que $g(f^2(v)) = h(f^2(v))$.
   - 7.3 En déduire que $g = h$, c'est-à-dire pour tout $x \in E$, $g(x) = h(x)$.
8. Soit $g \in \mathscr{C}(f)$.
   - 8.1 Vérifier qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tels que $g(v) = \alpha v + \beta f(v) + \gamma f^2(v)$.
   - 8.2 Montrer que $g = \alpha \mathrm{Id}_E + \beta f + \gamma f^2$.
9. Déduire de ce qui précède que $\mathscr{C}(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, f^2)$.
10. Déterminer $\dim \mathscr{C}(f)$.
11. Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $f^3 = a \mathrm{Id}_E + bf + cf^2$.

Troisième partie :
Cas d'un endomorphisme nilpotent

Dans cette partie f est un endomorphisme nilpotent de E d'indice de nilpotence égale à 3 c'est-à-dire $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

12. Vérifier l'existence de $v \in E$ tel que $f^2(v) \neq 0$.
13. Montrer que la famille $(v, f(v), f^2(v))$ est une base de E.
14. En déduire que $\mathscr{C}(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, f^2)$.

END