بِسمِ اللّٰهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Surveillé $N°$ 7

dim

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

rg

PCSI

Questions de Cours

1. Rappeler la définition d'une matrice inversible .
2. Rappeler la formule de binôme de Newton (pour les matrices).
3. Rappeler la définition de la matrice de passage d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$.
4. Rappeler la définition de la matrice d'un endomorphisme f dans une base $\mathscr{B}$.
5. Rappeler la définition d'une matrice diagonale .

Exercice 1

Soit A la matrice diagonale, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \ \ AM = MA\}$

1. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale, alors $D \in \mathscr{C}(A)$.
3. Montrer que $\mathscr{C}(A) = \{D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \ \ D \text{ diagonale } \}$
   Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $B = PAP^{-1}$, enfin $\mathscr{C}(B) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \ \ BM = MB\}$.
4. Montrer que $M \in \mathscr{C}(B)$ si, et seulement si, $P^{-1}MP \in \mathscr{C}(A)$.
5. En déduire que $\mathscr{C}(B) = \{PDP^{-1} / \ \ D \ \ \text{diagonale}\}$

Exercice 2

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, et $f : E \to E$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 2z, y + 3z, -y + z)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice de l'endomorphuisme f dans la base canonique.
3. Déterminer $\ker f$, en déduire $\operatorname{rg} f$.
4. Déterminer la matrice de f^2 dans la base canonique.

PROBLÈME

Diagonalisation d'une matrice et applications

Dans tout le problème A désigne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ *canoniquement associé* à la matrice A.
Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.

Première partie : l'endomorphisme f

1. Déterminer $f(e_i)$ pour $1 \leq i \leq 3$..
2. Pour $(x, y, z) \in E$, calculer $f(x, y, z)$.
3. Calculer $f(1, 1, 1)$ et $f(1, -2, 1)$.
4. Déterminer deux réels a et b tels que $f(-1, a, b) = (1, -a, -b)$.

Deuxième partie : Réduction de A

Dans cette partie, on considère les vecteurs $\varepsilon_1 = (1, -2, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, 1, 1)$ et $\varepsilon_3 = (-1, 0, 1)$.

5. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Déterminer P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
7. Calculer ${}^tPP$, en déduire que P est inversible et que $P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
8. Déterminer D la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.
9. Donner une relation entre les matrices A , D et P.

Troisième partie : Une application

On considère l'équation matricielle : $(\star)\ \ X^3 = A$.
On cherche à déterminer toutes les matrices $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $(\star)$.
Soit X une matrice vérifiant $(\star)$. On pose $Y = P^{-1}XP$.

10. Montrer que $Y^3 = D$.
11. Vérifier que $YD = DY$.
12. En déduire que Y est une matrice diagonale.
13. Déterminer la matrice Y.
14. Donner alors les solutions de $(\star)$

END