بِسمِ اللّٰهِ الرَّحمٰنِ الرَّحِيمِ

Devoir Surveillé N° 8

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

PCSI

Questions de Cours

1. Rappeler la caractérisation de l'inversibilité d'une matrice à l'aide d'un déterminant.
2. Rappeler la définition d'un produit scalaire .
3. Rappeler la définition d'une famille orthonormale.
4. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. Rappeler la définition de la norme associé à un produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

Exercice 1

Soit A la matrice suivante, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer $\det A$.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $A_\lambda = A - \lambda I_3$.
   - 2.1 Calculer $\det A_\lambda$.
   - 2.2 Justifier que A_λ est inversible si, et seulement si, $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 3$.
3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
   - 3.1 Déterminer un vecteur v_1 tel que $\ker(f - 3\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(v_1)$.
   - 3.2 Déterminer une base (v_2, v_3) de $\ker f$.
   - 3.3 Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   - 3.4 Déterminer B la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 2

Calculer le déterminant suivant : $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

Exercice 3

Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$. Pour $P,Q\in E$ on pose $\langle P,Q\rangle=\sum\limits_{i=0}^{n}P(i)Q(i)$.

1. Montrer que $\langle .,.\rangle$ défini un produit scalaire sur E.
2. Soit $P=(X-1)(X-2)\dots(X-n)=\prod_{k=1}^{n}(X-k)$. Déterminer $P^{\perp}$.

PROBLÈME

Première partie :
Théorème de Riez

On considère dans cette partie un espace euclidien $(E,\langle .,.\rangle)$ de dimension n, et $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E.

1. Soit $u\in E$, montrer que l'application $x\mapsto\langle x,u\rangle$ est linéaire .
   Soit $h\in\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ une forme linéaire.
2. Montrer que pour tout $x\in E$, $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k$.
3. En déduire que pour tout $x\in E$, $h(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle h(e_k)$.
   On pose $u=\sum\limits_{k=1}^{n}h(e_k)e_k$.
4. Montrer que pour tout $x\in E$, $h(x)=\langle x,u\rangle$.

Deuxième partie :
Un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$

Dans cette partie $E=\mathbb{R}^2$. Soit $\langle .,.\rangle\times E\to\mathbb{R}$ l'application définie pour $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)\in E$, par

$$\langle x,y\rangle=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$$

5. Montrer que $\langle .,.\rangle$ est symétrique et bilinéaire.
6. Montrer que pour tout $x=(x_1,x_2)\in E$, $\langle x,x\rangle=x_1^2+(x_1+x_2)^2+x_2^2$.
7. En déduire que $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire sur E.
   Dans la suite $B_c=(e_1,e_2)$ désigne la base canonique de E.
8. Calculer $\langle e_1,e_2\rangle$. La base B_c est-elle orthonormale ?
   Dans la suite on considère les deux veceteurs $v_1=\dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ et $v_2=\dfrac{e_2-\langle e_2,v_1\rangle v_1}{\|e_2-\langle e_2,v_1\rangle v_1\|}$
9. Déterminer $\|v_1\|$ et $\|v_2\|$.
10. Montrer que $\langle v_1,v_2\rangle=0$.
11. En déduire que (v_1,v_2) est une base orthonormale de E.

رمضان مبارك سعيد

END