Devoir Libre $N°$ 1

u Sous espaces stables $\mathscr{L}(E)$

PSI

Rappel

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et u un endomorphisme de E.
✍ Un sous espace vectoriel F est dit stable par u, si $u(F) \subseteq F$.
✍ On rappelle que $u^0 = \mathrm{Id}_E$, $u^1 = u$, $u^2 = u \circ u$, plus généralement, $u^p = \underbrace{u \circ u \circ \ldots \circ u}_{p\text{-fois}}$.
✍ Si $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(u)$ désigne l'endomorphisme $P(u) := \sum_{k=0}^{m} a_k u^k$.

PROBLÈME

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.
Si u est un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

Première partie : Généralités

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, u et v deux endomorphismes de E.

   1.1 Montrer que si u et v commutent, alors $\ker v$, $\mathrm{Im}\, v$ et $E_\lambda(v)$ sont stables par u.

   1.2 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $\ker(P(u))$ est stable par u.

   1.3 Montrer que si $e \in E_\lambda(u)$, alors $\mathrm{Vect}(e)$ est stable par u.

2. Montrer que si D est une droite vectorielle de E stable par u, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $D \subseteq E_\lambda(u)$.

3. Soit r un entier naturel.

   3.1 Montrer que si $E_1, \ldots, E_r$ sont des sous espace vectoriels de E stables par u, alors $\sum_{i=1}^{r} E_i$ est stable par u.

   3.2 Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ et $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$. Montrer que la somme $\sum_{i=1}^{r} \ker\left((u - \lambda_i \underset{E}{\mathrm{Id}})^{n_i}\right)$ est stable par u.

4. On suppose dans cette question que l'endomorphisme u vérifie : $\forall x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.

   4.1 Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$.

   4.2 Montrer que si $x, y \in E \setminus \{0\}$, alors $\lambda_x = \lambda_y$. Ind : on pourra distinguer les deux cas (x, y) liée ou libre.

4.3 Montrer que u est une homothétie.

5. Soit u un endomorphisme laissant stable tout sous espace vectoriel de E. Montrer que u est une homothétie.

Deuxième partie : Endomorphisme sans sous espace stable strict et non nul

Dans cette partie, $E = \mathbb{R}^2$ (donc $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Montrer que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.
On suppose qu'il existe un sous espace vectoriel D stricte et non nul de E stable par u.

7. Justifier que D est une droite vectorielle.

8. Soit e un vecteur non nul de D.

8.1 Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(e) = \lambda e$.

8.2 Montrer que $\lambda^2 = -1$.

9. En déduire que les seuls sous espaces vectoriels stables par u sont le sous espace vectoriel nul et E.

Troisième partie : Cas d'un endomorphisme nilpotent

Dans cette partie, u est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence $p \in \mathbb{N}^*$ c'est-à-dire : $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

10. Justifier l'existence d'un vecteur non nul $e \in E$ tel que $u^{p-1}(e) \neq 0$.

11. Montrer que la famille $(e, u(e), \dots, u^{p-1}(e))$ est libre.

12. En déduire que $p \leq n$.
Dans la suite u est un endomorphisme nilpotent d'indice n c'est-à-dire $p = n$.

13. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Dans la suite on fixe une telle base. Pour $1 \leq k \leq n$, on pose $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

14. Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n$, F_k est un sous espace stable par u. Quelle est la dimension de F_k ?

15. Soit F un sous espace vectoriel non nul et stable par u. On pose $A = \{k \in [\![1, n]\!] / F \subseteq F_k\}$.

15.1 Justifier que A admet un plus petit élément d, et que $F \subseteq F_d$.

15.2 Montrer que F contient un élément z de la forme $z = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_d e_d$ avec $\alpha_d \neq 0$.

15.3 Montrer que pour tout $1 \leq k \leq d$, $u^k(z) \in F$.

15.4 Montrer que la famille $(z, u(z), \dots, u^{d-1}(z))$ est libre, puis que $\dim F \geq d$.

15.5 En déduire que $F = F_d$.