Devoir Libre $N°$ 1

u

Un résultat sur les matrices d'ordre 2

$\mathscr{L}(E)$

PSI

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, u un endomorphisme de E et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
✍ On dit que u est une homothétie s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \operatorname{Id}_E$
✍ On dit que A est une matrice scalaire s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.

✍

PROBLÈME

Le but du problème est de démontrer que toute matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ *non scalaire* est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\det A \\ 1 & \operatorname{tr} A \end{pmatrix}$

Une question préliminaire :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie , u un endomorphisme de E et A la matrice de u dans une base $\mathscr{B}$.

1. Montrer que u est une homothétie si, et seulement si, A est une matrice scalaire.

Première partie :
Un exemple

Dans cette partie A désigne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^2$ canoniquement associé à la matrice A. Enfin $B = (e_1, e_2)$ désigne la base canonique de E.

2. Vérifier que la matrice A est inversible.
3. Déterminer $u(e_1)$ et $u(e_2)$.
Dans la suite de cette partie $v_1 = e_1$ et $v_2 = u(e_1)$.
4. Déterminer les deux vecteurs v_1 et v_2.
5. Montrer que (v_1, v_2) est une base de E.
6. Déterminer deux nombres α et β tels que $u(v_2) = \alpha v_1 + \beta v_2$.
7. Déterminer la matrice de u dans la base (v_1, v_2).
8. En déduire que la matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\det A \\ 1 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}$.

Deuxième partie :
Une caractérisation des homothéties

Dans cette partie E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \text{la famille } (x, u(x)) \text{ est liée.}$$

9. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$.

10. Soit $x, y \in E \setminus \{0\}$.

    10.1 Montrer que si la famille (x, y) est liée, alors $\lambda_x = \lambda_y$.

    10.2 Montrer que si la famille (x, y) est libre, alors $\lambda_x = \lambda_y$. Indication : on pourra calculer $u(x+y)$ de deux façons.

11. En déduire que u est une homothétie.

Troisième partie : Démonstration du résultat

Dans cette partie $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est une matrice *non scalaire*. On désigne par u l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^2$ canoniquement associé à la matrice A.

12. Vérifier l'existence d'un vecteur $e \in E$ tel que la famille $(e, u(e))$ soit une base de E.
On pose $v_1 = e$ et $v_2 = u(e)$. $\mathscr{B}$ désigne la base (v_1, v_2).

13. Justifier l'existence de deux nombres $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $u(v_2) = av_1 + bv_2$.

14. Déterminer B la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.

15. En déduire que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

16. Montrer que $b = \operatorname{tr} A$ et $a = -\det A$.