Devoir Surveillé $N°$ 1

u — $\mathscr{L}(E)$

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

PSI

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, u un endomorphisme de E et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
✍ On dit que u est une homothétie s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \operatorname{Id}_E$
✍ On dit que A est une matrice scalaire s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.

✍

Questions de cours

1. Rappeler la définition de la somme des sous espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r$.
2. Rappeler la définition de la somme directe des sous espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r$.
3. Rappeler la définition d'une forme linéaire sur un espace vectoriel E.
4. Rappelr la définition d'un hyperplan d'un espace vectoriel E.
5. Donner un résultat du cours qui caractérise les hyperplans à l'aide des formes linéaires.

✍

Exercice 1

1. Montrer que $H := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ \operatorname{tr} A = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ l'application définie par : $\varphi(P) = P(1)$.
   - 2.1 Montrer que φ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{K}[X]$.
   - 2.2 En déduire que $\mathbb{K}[X] = \ker \varphi \oplus \operatorname{Vect}(X)$.

PROBLÈME

Le but du problème est de démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ *non scalaire* est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\det A \\ 1 & \operatorname{tr} A \end{pmatrix}$

Une question préliminaire :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie , u un endomorphisme de E et A la matrice de u dans une base $\mathscr{B}$.

$\boxed{1.}$ Montrer que u est une hamothétie si, et seulement si, A est une matrice scalaire.

Première partie :
Un exemple

Dans cette partie A désigne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^2$ canoniquement associé à la matrice A. Enfin $B = (e_1, e_2)$ désigne la base canonique de E.

$\boxed{2.}$ Vérifier que la matrice A est inversible.

$\boxed{3.}$ Déterminer $u(e_1)$ et $u(e_2)$.
Dans la suite de cette partie $v_1 = e_1$ et $v_2 = u(e_1)$.

$\boxed{4.}$ Déterminer les deux vecteurs v_1 et v_2.

$\boxed{5.}$ Montrer que (v_1, v_2) est une base de E.

$\boxed{6.}$ Déterminer deux nombres α et β tels que $u(v_2) = \alpha v_1 + \beta v_2$.

$\boxed{7.}$ Déterminer la matrice de u dans la base (v_1, v_2).

$\boxed{8.}$ En déduire que la matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\det A \\ 1 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}$.

Deuxième partie :
Une caractérisation des homothéties

Dans cette partie E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \text{la famille } (x, u(x)) \text{ est liée.}$$

$\boxed{9.}$ Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$.

$\boxed{10.}$ Soit $x, y \in E \setminus \{0\}$.

$\boxed{10.1}$ Montrer que si la famille (x, y) est liée, alors $\lambda_x = \lambda_y$.

$\boxed{10.2}$ Montrer que si la famille (x, y) est libre, alors $\lambda_x = \lambda_y$. Indication : on pourra calculer $u(x+y)$ de deux façons.

$\boxed{11.}$ En déduire que u est une homothétie.

Troisième partie :
Démonstration du résultat

Dans cette partie $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est une matrice *non scalaire*. On désigne par u l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^2$ canoniquement associé à la matrice A.

$\boxed{12.}$ Vérifier l'existence d'un vecteur $e \in E$ tel que la famille $(e, u(e))$ soit une base de E.
On pose $v_1 = e$ et $v_2 = u(e)$. $\mathscr{B}$ désigne la base (v_1, v_2).

$\boxed{13.}$ Justifier l'existence de deux nombres $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $u(v_2) = av_1 + bv_2$.

$\boxed{14.}$ Déterminer B la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.

$\boxed{15.}$ En déduire que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

$\boxed{16.}$ Montrer que $b = \operatorname{tr} A$ et $a = -\det A$.