Devoir Surveillé $N°$ 1

u $\mathscr{L}(E)$

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

PSI

Définition

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Questions de cours

1. Rappeler la définition de la somme des sous espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r$.
2. Rappeler la définition de la somme directe des sous espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r$.

Exercice 1 Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On désigne par f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $P(\lambda) := \det(A - \lambda I_3)$.
2. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible.
3. Déterminer trois vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in E$ tels que $\ker f = \mathrm{Vect}(v_1)$, $\ker(f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(v_2)$ et $\ker(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(v_3)$.
4. Montrer que $\mathscr{B}' := (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.
5. Déterminer D la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.
6. Déterminer P la matrice de passage de la base canonique de E à la base $\mathscr{B}'$, puis donner une relation entre les matrices P, D et A.

PROBLÈME

Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A qu'on note $\mathrm{tr}\, A$ le nombre

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Première partie :
Propriétés de la trace

1. Montrer que l'application $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est linéaire.
2. Montrer que pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
3. Montrer que si $A\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices semblables alors $\mathrm{tr}\,A = \mathrm{tr}\,B$.
4. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Quelle est la trace de la matrice $\frac{\lambda}{n} I_n$? En déduire que l'application tr est surjective.
6. Montrer que $H := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ /\ \mathrm{tr}\,A = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $n^2 - 1$.
7. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = H \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.
8. Une application : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB - BA = I_n$. Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 2.

Deuxième partie :
Endomorphisme de rang 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1, et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice A. On désigne par $\mathscr{B}_c$ la base canonique de E.

9. Quel est le rang de f ?
10. Montrer qu'il existe un vecteur non nul $e \in E$ tel que $\mathrm{Im}\,f = \mathrm{Vect}(e)$.
11. Montrer qu'il existe un vecteur $e' \in E$ tel que $e = f(e')$, puis que $E = \ker f \oplus \mathrm{Vect}(e')$.
12. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f(e) = \alpha e$.
13. Soit $\mathscr{B}_1 = (e_1, \dots, e_{n-1})$ une base du $\ker f$. Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e')$ est une base de E.
14. Posons $f(e') = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_k + \alpha_n e'$ (la décomposition de $f(e')$ dans la base $\mathscr{B}$). Déterminer B la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$. Que peut-on dire des deux matrices A et B ?
15. Montrer que $\alpha_n = \mathrm{tr}\,A$.
16. En déduire que $\alpha = \mathrm{tr}\,A$.
17. Montrer que $A^2 = (\mathrm{tr}\,A)A$.