# Devoir Surveillé $N°$ 1

$u$

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

$\mathscr{L}(E)$

PSI

Corrigé

## Définition

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $A$ et $B$ sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

## Questions de cours

Cours

**Exercice 1** Soit $A$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On désigne par $f$ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $P(\lambda) := \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1+\lambda)(1-\lambda)$.

2. La matrice $A - \lambda I_3$ est non inversible si, et seulement si, $\det(A - \lambda I_3) = 0$ si, et seulement si, $\lambda(1+\lambda)(1-\lambda) = 0$ si, et seulement si, $\lambda \in \{0, -1, 1\}$.

3. Détermination du $\ker f$ : $(x, y, z) \in \ker f$ si, et seulement si, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ si, et seulement si, $y = z = 0$. Ainsi $\ker f = \mathrm{Vect}(1, 0, 0)$.
   De même $\ker(f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(1, 1, 0)$ et $\ker(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(1, 1, 2)$. Les trois vecteurs $v_1 = (1, 0, 0)$ , $v_2 = (1, 1, 0)$ , $v_3 = (1, 1, 2)$ conviennent.

4. On a $\det_{\mathscr{B}_c}(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, donc la famille est une base de $E$.

5. On a $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = -v_2$ et $f(v_3) = v_3$, donc

$$\mathscr{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. la matrice de passage est donné par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. D'après la formule de changement de bases on a $A = PDP^{-1}$.

# PROBLÈME

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de $A$ qu'on note $\operatorname{tr} A$ le nombre

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

## Première partie :
## Propriétés de la trace

Pour une matrice $M$, $M_{ij}$ désigne son coefficient d'indice $(i,j)$.

1. Soit $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\operatorname{tr}(A+\lambda B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+\lambda b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \lambda\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{tr}(A) + \lambda \operatorname{tr}(B)$$

2. Soit $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\operatorname{tr}(AB) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ki} = \sum_{k=1}^{n}(BA)_{kk} = \operatorname{tr}(BA)$$

3. Si $A$ et $B$ sont semblables, alors il existe $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. En appliquant le résultat de la question précédente, on obtient $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(PBP^{-1}) = \operatorname{tr}(P^{-1}PB) = \operatorname{tr}(B)$

4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $\operatorname{tr}({}^tA) = \sum_{i=1}^{n}({}^tA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \operatorname{tr}(A)$.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Par linéarité $\operatorname{tr}(\frac{\lambda}{n}I_n) = \frac{\lambda}{n}\operatorname{tr}(I_n) = \frac{\lambda}{n}n = \lambda$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda = \operatorname{tr}(\frac{\lambda}{n}I_n)$. Donc l'application tr est surjective.

6. Remarquons que $H := \ker \operatorname{tr}$, donc c'est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. D'après le résultat de la question précédente, $\operatorname{Im}\operatorname{tr} = \mathbb{K}$, donc $\operatorname{rg}\operatorname{tr} = 1$. On en déduit, en appliquant la formule du rang, que $\dim H = \dim\ker\operatorname{tr} = n^2 - \operatorname{rg}\operatorname{tr} = n^2 - 1$.

7. Soit $A \in H \cap \operatorname{Vect}(I_n)$. Il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $A = \alpha I_n$. Puisque $\operatorname{tr}(A) = 0$, on obtient $\alpha n = 0$, d'où $\alpha = 0$, en particulier $A = 0$. On en déduit alors que la somme est directe. D'autre part on a $\dim H + \dim \operatorname{Vect}(I_n) = n^2 - 1 + 1 = n^2 = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. D'où le résultat.

8. Supposons qu'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB - BA = I_n$. Dans ce cas $n = \operatorname{tr}(I_n) = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(AB) = 0$, ce qui n'est pas le cas.

## Deuxième partie :
## Endomorphisme de rang 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1, et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice $A$. On désigne par $\mathscr{B}_c$ la base canonique de $E$.

9. $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(A) = 1$.

10. On a $\dim \operatorname{Im} f = 1$, donc $\operatorname{Im} f$ est une droite vectorielle. Il existe alors un vecteur non nul $e$ tel que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e)$.

11. On a $e \in \operatorname{Im} f = f(E)$ donc existe un vecteur $e' \in E$ tel que $e = f(e')$.
Soit $x \in \ker f \cap \operatorname{Vect}(e')$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda e'$. On a alors $0 = f(x) = \lambda f(e') = \lambda e'$ donc $\lambda = 0$, puis $x = 0$. De plus on a $\dim \ker f + \dim \operatorname{Vect}(e') = n - 1 + 1 = n = \dim E$, il vient alors que $E = \ker f \oplus \operatorname{Vect}(e')$.

12. On a $f(e) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Vcet}(e)$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f(e) = \alpha e$.

13. Soit $\mathscr{B}_1 = (e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base du $\ker f$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{n-1} e_{n-1} + \lambda_n e' = 0$. On a $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{n-1} e_{n-1} \in H$ et $\lambda_n e' \in \operatorname{Vect}(e')$, donc $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{n-1} e_{n-1} = 0$ et $\lambda_n e' = 0$ (du fait que la somme $H + \operatorname{Vcet}(e')$ est directe). Puisque $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est libre et $e' \neq 0$, il vient alors que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$. La famille $\mathscr{B}$ est libre à $n (= \dim E)$ éléments, il s'agit alors d'une base de $E$.

14. Posons $f(e') = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_k + \alpha_n e'$ ( la décomposition de $f(e')$ dans la base $\mathscr{B}$). On a $f(e_1) = \ldots = f(e_{n-1}) = 0$ donc les $n-1$ premières colonnes de $B$ sont nulles, de plus $f(e') = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{n-1} e_{n-1} + \alpha_n e'$. D'où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Le théorème de changement de bases assure que les deux matrices $A$ et $B$ sont semblables.

15. D'après la formule de changement de bases, les deux matrices $A$ et $B$ sont semblables, donc $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) = \alpha_n$.

16. Il suffit de montrer que $\alpha_n = \alpha$. En appliquant $f$ à l'égalité $f(e') = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_k + \alpha_n e'$ et en tenant compte que les $e_k \in \ker f$, on obtient $f(f(e')) = f(\alpha_n e')$ c'est-à-dire $f(e) = \alpha_n e$, par suite $\alpha_n e = \alpha e$, par conséquent $\alpha = \alpha_n$ (car $e \neq 0$).

17. Soit $x \in E = \ker f \oplus \operatorname{Vect}(e')$, il existe $z \in \ker f$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = z + \lambda e'$. On a $f(x) = f(z) + f(\lambda e') = \lambda e$, puis $f^2(x) = f(f(x)) = f(\lambda e) = \lambda f(e) = \lambda \alpha e = \alpha(\lambda e) = \alpha f(x)$. Il vient alors que $f^2 = \alpha f$. Par conséquent $A^2 = \mathscr{M}_{\mathscr{B}_c}(f^2) = \mathscr{M}_{\mathscr{B}_c}(\alpha f) = \alpha \mathscr{M}_{\mathscr{B}_c}(f) = \alpha A = \operatorname{tr}(A) A$.